Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题全解3

原题译自俄文第13版

最新校订版

南京大学数学系

不定积分　定积分

经典名著最新版本
全书增补数百新题
题型最全题量最大
数学名家详细解析

ISBN 978-7-212-02697-4
定价：20.00 元

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

（三）

南京大学数学系
廖良文　许　宁　编著
毕秉钧　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 3/(苏)吉米多维奇著. 廖良文，许宁编著. 一合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978-7-212-02697-4

Ⅰ.吉… Ⅱ.①吉…②廖…③许… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113598 号

吉米多维奇数学分析习题全解(三)

(苏)吉米多维奇 著 廖良文 许 宁 编著 毕秉钧 译

责任编辑	王玉法 **封面设计** 王国亮
出版发行	安徽人民出版社
地 址	合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场 邮编:230071
发 行 部	0551-3533258 0551-3533292(传真)
经 销	新华书店
印 刷	南京新洲印刷有限公司
开 本	880×1230 1/32 **印张** 15.5 **字数** 360 千
版 次	2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)
标准书号	ISBN978-7-212-02697-4
定 价	20.00 元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第13版（最新版本）为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第三章　不定积分

§1. 最简单的不定积分

1. **不定积分的概念**　若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间有定义且是连续的，$F(x)$ 是其原函数，即 $F'(x)=f'(x)$，则当 $a<x<b$ 时，

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C,\qquad a<x<b$$

其中 C 为任意常数.

2. **不定积分的基本性质**

(1) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int \mathrm{d}\Phi(x)=\Phi(x)+C$；

(3) $\int Af(x)\mathrm{d}x = A\int f(x)\mathrm{d}x$　（A 为常数且 $A\neq 0$）；

(4) $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

3. **最简积分表**

(1) $\int x^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C(n\neq -1)$；

(2) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C(x\neq 0)$；

(3) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\begin{cases}\arctan x+C,\\ -\operatorname{arccot}x+C;\end{cases}$

(4) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$；

(5) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C;\end{cases}$

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$;

(7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$;

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

(8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

(9) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;

(11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$;

(12) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

(13) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

(14) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

(15) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

4. **积分的基本方法**

(1) 换元积分法　若

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

则 $$\int f(u)du = F(u) + C,$$

其中 $u = \varphi(x)$ 为连续可微分函数.

(2) 分项积分法　若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则 $$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

(3) 代换法　若 $f(x)$ 是连续函数,则假设

$$x = \varphi(t),$$

其中 $\varphi(t)$ 与其导数 $\varphi'(t)$ 都是连续的，则得出

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(4) 分部积分法　若 u 和 v 是 x 的可微分函数，则

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

运用最简积分表，求出下列积分(1628 ~ 1653).

【1628】 $\int (3-x^2)^3\mathrm{d}x.$

解 $$\int (3-x^2)^3\mathrm{d}x = \int (27-27x^2+9x^4-x^6)\mathrm{d}x$$
$$= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.$$

【1629】 $\int x^2(5-x)^4\mathrm{d}x.$

解 $$\int x^2(5-x)^4\mathrm{d}x$$
$$= \int (625x^2 - 500x^3 + 150x^4 - 20x^5 + x^6)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + C.$$

【1630】 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x.$

解 $$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x$$
$$= \int (1-6x+11x^2-6x^3)\mathrm{d}x$$
$$= x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C.$$

【1631】 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$

解 $$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.$$

【1632】 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)\mathrm{d}x.$

解 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

$$=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+C.$$

【1633】 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

【1634】 $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$$

$$=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$$

【1635】 $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}})\mathrm{d}x$

$$=-3x^{-\frac{1}{3}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3)+C.$$

【1636】 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

解　$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})\mathrm{d}x$

$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$

【1637】 $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}\mathrm{d}x.$

解　$\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}\mathrm{d}x$

$=\int(2-2\sqrt[6]{76}x^{-\frac{1}{6}}+3\sqrt{9}x^{-\frac{1}{3}})\mathrm{d}x$

$=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{76}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}x^{\frac{2}{3}}+C.$

【1638】 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x.$

解　$\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}\mathrm{d}x$

$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$

【1639】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

解　$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=x-\arctan x+C.$

【1640】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1-x^2}.$

解　$\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$

【1641】 $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$

$$=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

【1642】 $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x.$

解 $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

【1643】 $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$$

【1644】 $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x.$

解 $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{4^x}{\ln4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C.$$

【1645】 $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x=\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{2^x\cdot5^x}\mathrm{d}x$

$$=\int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C.$$

【1646】 $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx.$

解 $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int(e^{2x}-e^x+1)dx$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C.$$

【1647】 $\int(1+\sin x+\cos x)dx.$

解 $\int(1+\sin x+\cos x)dx=x-\cos x+\sin x+C.$

【1648】 $\int\sqrt{1-\sin 2x}dx \quad (0\leqslant x\leqslant\pi).$

解 $\int\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx$

$$=\int[\mathrm{sgn}(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\mathrm{sgn}(\cos x-\sin x)+C.$$

【1649】 $\int\cot^2 x dx.$

解 $\int\cot^2 x dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\cot x-x+C.$

【1650】 $\int\tan^2 x dx.$

解 $\int\tan^2 x dx=\int(\sec^x-1)dx=\tan x-x+C.$

【1651】 $\int(a\,\mathrm{sh}x+b\,\mathrm{ch}x)dx.$

解 $\int(a\,\mathrm{sh}x+b\,\mathrm{ch}x)dx=a\,\mathrm{ch}x+b\,\mathrm{sh}x+C.$

【1652】 $\int\mathrm{th}^2 x dx.$

解 $\int\mathrm{th}^2 x dx=\int\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)dx=x-\mathrm{th}x+C.$

【1653】 $\int \mathrm{cth}^2 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{cth}^2 x \mathrm{d}x = \int \left(1+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\right)\mathrm{d}x = x - \mathrm{cth}x + C.$

【1654】 证明：若$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，

则 $$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0).$$

证明 由$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，

知 $$F'(x) = f(x),$$

从而 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{a}F(ax+c)\right] = F'(ax+b) = f(ax+b),$$

所以 $$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

求解下列积分(1655 ~ 1673).

【1655】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \int \frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a} = \ln|x+a|+C.$

【1656】 $\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x$.

解 $$\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}(2x-3) = \frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C.$$

【1657】 $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1-3x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{(1-3x)}+C.$$

【1658】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{5}\int(2-5x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2-5x)=-\frac{1}{5}\cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C.$$

【1659】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{5}\int(5x-2)^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}(5x-2)$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{2}{15(5x-2)\sqrt{5x-2}}+C.$$

【1660】 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\mathrm{d}x=-\int(1-x)^{-\frac{3}{5}}\mathrm{d}(1-x)$

$$=-\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{2}{5}}+C=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C.$$

【1661】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C.$$

【1662】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|+C.$$

【1663】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C.$$

【1664】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}|+C$$

其中 $C=C_1-\frac{\ln 2}{2\sqrt{3}}$.

【1665】 $\int(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x$.

解 $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx=-\int e^{-x}d(-x)-\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x)$

$$=-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.$$

【1666】 $\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)dx.$

解 $\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)dx=-\frac{1}{5}\cos 5x-x\sin 5\alpha+C.$

【1667】 $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

解 $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=-\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

【1668】 $\int\frac{dx}{1+\cos x}.$

解 $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\tan\frac{x}{2}+C.$

【1669】 $\int\frac{dx}{1-\cos x}.$

解 $\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=-\cot\frac{x}{2}+C.$

【1670】 $\int\frac{dx}{1+\sin x}.$

解 $\int\frac{dx}{1+\sin x}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$$=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

【1671】 $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\mathrm{d}x.$

解 $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\operatorname{sh}(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)+\frac{1}{2}\int\operatorname{ch}(2x-1)\mathrm{d}(2x-1)$$

$$=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]+C.$$

【1672】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=2\operatorname{th}\frac{x}{2}+C.$

【1673】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}+C.$

通过适当地变换被积表达式，求解下列积分(1674 ~ 1720).

【1674】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$

【1675】 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x.$

解 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+x^3)$

$$=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C.$$

【1676】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{3-2x^2}$.

解 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(3-2x^2)}{(3-2x^2)}$

$= -\frac{1}{4}\ln|3-2x^2| + C.$

【1677】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

解 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + C.$

【1678】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4}$.

解 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2} + C.$

【1679】 $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2}$.

解 $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$

【1680】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$.

提示：$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x} + C.$

【1681】 $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

解 $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int \sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C.$

【1682】 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{|x|}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C.$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C.$$

【1683】 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$,则有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}$$

$$= -\int \frac{|t|}{t}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\operatorname{sgn}t \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\operatorname{sgn}t \cdot \arcsin t + C = -\operatorname{sgn}\frac{1}{x} \cdot \arcsin\frac{1}{x}+C.$$

【1684】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$. 则

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{|t|^3}}$$

$$=-\int\frac{\mathrm{sgn}t\cdot t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}t\int\frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{sgn}t+C=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}x+C$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

【1685】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\frac{1}{2}\int(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}(x^2-1)=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C.$$

【1686】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

解 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{24}\int(8x^3+27)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}(8x^3+27)$

$$=\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}+C.$$

【1687】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$.

解 由 $x(1+x)>0$,知 $x>0$ 或 $x<-1$.

当 $x>0$ 时,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$$

$$=2\ln|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}|+C.$$

当 $x<-1$ 时,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=-\int\frac{\mathrm{d}[-(1+x)]}{\sqrt{(-x)[-(1+x)]}}$$

$$=-2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$$

$$= -2\ln|\sqrt{-x}+\sqrt{-(1+x)}|+C.$$

总之 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\cdot\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$

【1688】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}.$

解 要使 $x(1-x)>0$,必须 $0<x<1$,所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

【1689】 $\displaystyle\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

【1690】 $\displaystyle\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{2+e^x}.$

解 $\displaystyle\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{2+e^x}=\int\frac{\mathrm{d}(2+e^x)}{2+e^x}=\ln(2+e^x)+C.$

【1691】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}.$

解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{\mathrm{d}(e^x)}{(e^x)^2+1}=\arctan(e^x)+C.$

【1692】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x\sqrt{1+e^{-2x}}}=-\int\frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}$

$$=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})+C.$$

【1693】 $\displaystyle\int\frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int\frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln^2 x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$

【1694】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}.$

解 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x}{\ln x\ln(\ln x)}$

$= \int \frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C.$

【1695】 $\int \sin^5 x\cos x dx.$

解 $\int \sin^5 x\cos x dx = \int \sin^5 x d(\sin x)$

$= \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$

【1696】 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx.$

解 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx = -\int \cos^{-\frac{3}{2}} x d(\cos x)$

$= 2\cos^{-\frac{1}{2}} x + C = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$

【1697】 $\int \tan x dx.$

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$= -\ln|\cos x| + C.$

【1698】 $\int \cot x dx.$

解 $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$= \ln|\sin x| + C.$

【1699】 $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx.$

解 $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx$

$= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x)$

$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C.$

【1700】 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx.$

解 当 $|a|=|b|\neq 0$ 时，

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx=\frac{1}{|a|}\int \sin x\cos x dx$$

$$=\frac{1}{|a|}\int \sin x d(\sin x)=\frac{1}{2|a|}\sin^2 x+C.$$

当 $|a|\neq|b|$ 时，

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C.$$

【1700.1】 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx.$

解 $$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\cos x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\cos x)^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2\cos^2 x-1}\right|+C.$$

【1700.2】 $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx.$

解 $$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\sin x)}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin x)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+C.$$

【1700.3】 $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}dx.$

解 $\int \frac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{\mathrm{ch}2x}}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{2\mathrm{ch}^2x-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\mathrm{ch}x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\mathrm{ch}x)^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\mathrm{ch}x+\sqrt{2\mathrm{ch}^2x-1})+C.$$

【1701】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\sqrt[4]{\cot x}}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\sqrt[4]{\cot x}}=-\int(\cot x)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}(\cot x)$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3x}+C.$$

【1702】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x+2\cos^2x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x+2\cos^2x}$

$$=\int \frac{1}{\tan^2x+2}\cdot\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

【1703】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2}{x}}=\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}$

$$=\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【1704】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

【1705】 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x}=\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=\int \frac{1}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}\cdot\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$

$$=\int \frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$$

【1706】 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}x}=\int \frac{2dx}{e^x+e^{-x}}=2\int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}$

$$=2\arctan(e^x)+C.$$

【1707】 $\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}dx$.

解 因为

$$\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x=(\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x)^2-2\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x$$

$$=\operatorname{ch}^2 2x-\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x=\frac{1+\operatorname{ch}^2 2x}{2},$$

所以 $\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}dx$

$$=\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{4}d(\operatorname{ch}2x)}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\operatorname{ch}2x+\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x})+C.$$

【1708】 $\int \frac{dx}{ch^2 x \sqrt[3]{th^2 x}}$.

解 $\int \frac{dx}{ch^2 x \sqrt[3]{th^2 x}} = \int (thx)^{-\frac{2}{3}} d(thx) = 3\sqrt[3]{thx} + C.$

【1709】 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

解 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int \arctan x d(\arctan x) = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$

【1710】 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

【1711】 $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$.

解 $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$

$= \int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}} d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$

$= \frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}} + C.$

【1712】 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

提示：$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

解 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx$

$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C.$

【1713】 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)}{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^2-1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}+C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C.$$

【1714】 $\int \frac{x^{14}\mathrm{d}x}{(x^5+1)^4}$.

解 $\int \frac{x^{14}\mathrm{d}x}{(x^5+1)^4} = \int \frac{x^{14}\mathrm{d}x}{x^{20}(1+x^{-5})^4} = -\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^{-5})}{(1+x^{-5})^4}$

$$= \frac{1}{15}(1+x^{-5})^{-3}+C_1 = \frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3}+C_1$$

$$= \frac{(x^5+1)^3-3x^{10}-3x^5-1}{15(x^5+1)^3}+C_1$$

$$= -\frac{3x^{10}+3x^5+1}{15(x^5+1)^3}+C,$$

其中 $C = C_1+\frac{1}{15}$.

【1715】 $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

解 当 $n=-2$ 时,

$$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|+C.$$

当 $n \neq -2$ 时，

$$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx = \frac{2}{n+2}\int \frac{d(x^{\frac{n+2}{2}})}{\sqrt{1+(x^{\frac{n+2}{2}})^2}}$$

$$= \frac{2}{n+2}\ln(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}})+C.$$

【1716】 $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$

解 $$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C.$$

【1717】 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$

解 $$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C.$$

【1718】 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx.$

解 因为

$$\sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1+\cos^2 2x}{2},$$

所以 $$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{d(\cos 2x)}{\frac{1+\cos^2 2x}{2}} = -\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C.$$

【1719】 $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\ln 3 - \ln 2}\int \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)}\ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C.$$

【1720】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}.$

解 $$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1 + x^2)}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(1 + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}} = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + C.$$

用分项积分法计算下列积分(1721 ~ 1765).

【1721】 $\int x^2(2 - 3x^2)^2\mathrm{d}x.$

解 $$\int x^2(2 - 3x^2)^2\mathrm{d}x = \int (4x^2 - 12x^4 + 9x^6)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{9}{7}x^7 + C.$$

【1721.1】 $\int x(1 - x)^{10}\mathrm{d}x.$

解 法一：$\int x(1-x)^{10}\mathrm{d}x=-\frac{1}{11}\int x\mathrm{d}[(1-x)^{11}]$

$$=-\frac{1}{11}x(1-x)^{11}+\frac{1}{11}\int(1-x)^{11}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{11}x(1-x)^{11}-\frac{1}{122}(1-x)^{12}+C.$$

法二：$\int x(1-x)^{10}\mathrm{d}x=\int[(x-1)+1](x-1)^{10}\mathrm{d}x$

$$=\int[(x-1)^{11}+(x-1)^{10}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{12}(x-1)^{12}+\frac{1}{11}(x-1)^{11}+C.$$

【1722】 $\int\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\int\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)\mathrm{d}x$

$$=-x-2\ln|1-x|+C.$$

【1723】 $\int\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x=\int\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|1+x|+C.$$

【1724】 $\int\frac{x^3}{3+x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x^3}{3+x}\mathrm{d}x=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{3+x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|3+x|+C.$$

【1725】 $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int dx+\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=x+\ln(1+x^2)+C.$$

【1726】 $\int\frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx.$

解 $\int\frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx=\int\frac{(x^2-2)-4x+6}{2-x^2}dx$

$$=\int\left(-1-\frac{4x}{2-x^2}+\frac{6}{2-x^2}\right)dx$$

$$=-x+2\ln|2-x^2|+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+C.$$

【1727】 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}=\int\frac{[(x-1)+1]^2}{(1-x)^{100}}dx$

$$=\int[(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}]dx$$

$$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$$

【1728】 $\int\frac{x^5}{x+1}dx.$

解 $\int\frac{x^5}{x+1}dx=\int\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+1|+C.$$

【1729】 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\int\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx$

$$=\frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}]+C.$$

【1730】 $\int x\sqrt{2-5x}dx.$

提示:$x=-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}.$

解 $\int x\sqrt{2-5x}\mathrm{d}x=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}\right](2-5x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C.$

【1731】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-3x}}=-\frac{1}{3}\int\frac{(1-3x)-1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{3}\int[(1-3x)^{\frac{2}{3}}-(1-3x)^{-\frac{1}{3}}]\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C$

$=-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C.$

【1732】 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int[(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+x^2)$

$=\frac{1}{2}[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}]\mathrm{d}(1+x^2)$

$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C$

$=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$

【1733】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+3)}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$

【1734】 $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 $\int \frac{dx}{x^2+x-2}=\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$

【1735】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}=\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)dx$

$=\arctan x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

【1736】 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-2}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx$

$=\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

【1737】 $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$.

解 $\int \frac{x}{(x+2)(x+3)}dx=\int\left(\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}\right)dx$

$=\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}+C.$

【1738】 $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

解 $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)d(x^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+C.$

【1739】 $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}\quad(a\neq b)$.

解 $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(b-a)^2}\int\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)^2 dx$

$= \frac{1}{(b-a)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - 2\frac{1}{(x+a)(x+b)}\right]dx$

$= \frac{1}{(b-a)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)\right]dx$

$= -\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}\right) - \frac{2}{(b-a)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C.$

【1740】 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2).$

解 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$= \frac{1}{b^2-a^2}\int\left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$

$= \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} - \frac{1}{b}\int \frac{d\left(\frac{x}{b}\right)}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}\right]$

$= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} - \frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}\right) + C.$

【1741】 $\int \sin^2 x dx.$

解 $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

【1742】 $\int \cos^2 x dx.$

解 $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

【1743】 $\int \sin x \sin(x+\alpha) dx.$

解 $\int \sin x \sin(x+\alpha) dx$

$= \frac{1}{2}\int[\cos\alpha - \cos(2x+\alpha)]dx$

$$= \frac{1}{2}x\cos\alpha - \frac{1}{4}\sin(2x+\alpha) + C.$$

【1744】 $\int \sin 3x \cdot \sin 5x \mathrm{d}x$.

解 $\int \sin 3x \sin 5x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

【1745】 $\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5x}{6} + \cos\frac{x}{6}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + 3\sin\frac{x}{6} + C.$$

【1746】 $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin 5x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

【1747】 $\int \sin^3 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^3 x \mathrm{d}x = -\int \sin^2 x \mathrm{d}(\cos x)$

$$= \int (\cos^2 x - 1)\mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$$

【1748】 $\int \cos^3 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int (1 - \sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

【1749】 $\int \sin^4 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x)\mathrm{d}x$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

【1750】 $\int \cos^4 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \cos^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{8}\int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x)\mathrm{d}x$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

【1751】 $\int \cot^2 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \cot^2 x \mathrm{d}x = \int (\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x = -\cot x - x + C.$

【1752】 $\int \tan^3 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \tan^3 x \mathrm{d}x = \int \tan x \cdot (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$= \int \tan x \mathrm{d}(\tan x) - \int \tan x \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

注:参见题 1697:$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$.

【1753】 $\int \sin^2 3x\sin^3 2x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^2 3x\sin^3 2x\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{2}(1-\cos 6x)\cdot\frac{1}{4}(3\sin 2x-\sin 6x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int (3\sin 2x - 3\cos 6x\sin 2x - \sin 6x + \sin 6x\cdot\cos 6x)\mathrm{d}x \\
&= \int\Big(\frac{3}{8}\sin 2x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{16}\sin 8x \\
&\quad + \frac{1}{16}\sin 12x\Big)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{16}\cos 2x - \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x \\
&\quad + \frac{3}{128}\cos 8x - \frac{1}{192}\cos 12x + C.
\end{aligned}
$$

【1754】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

提示:$1 \equiv \sin^2 x + \cos^2 x$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$
= \int\Big(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\Big)\mathrm{d}x = \tan x - \cot x + C.
$$

【1755】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cdot\cos x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x} = \int\Big(\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\Big)\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x) \\
&= \ln\left|\tan\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\right| - \frac{1}{\sin x} + C.
\end{aligned}
$$

注:由 1704 题知

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

【1756】 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = \int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin x}\right)dx$

$$=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

注:由 1703 题知

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【1757】 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$.

解 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}d(\sin x)$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)d(\sin x) = \ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

【1758】 $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x\cdot\sec^2 x dx = \int(1+\tan^2 x)d(\tan x)$

$$=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$$

【1759】 $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

解 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = x-\ln(1+e^x)+C.$

【1760】 $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$.

解 $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx = \int\left(1+2\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$

$$=\int dx+2\int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = x+2\arctan(e^x)+C.$$

【1761】 $\int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2}{4}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}x + C$

$= \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x - \frac{1}{2}x + C.$

【1762】 $\int \mathrm{ch}^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{ch}^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2}{4}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x + C$

$= \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{2}x + C.$

【1763】 $\int \mathrm{sh}x\mathrm{sh}2x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}2x\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{ch}x\mathrm{d}x$

$= 2\int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{d}(\mathrm{sh}x) = \frac{2}{3}\mathrm{sh}^3 x + C.$

【1764】 $\int \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}3x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}3x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int (\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-3x})\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int (\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{-4x}+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{-4x}) + \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}) + C$

$= \frac{1}{8}\mathrm{sh}4x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C.$

【1765】 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) dx = -(\operatorname{cth} x + \operatorname{th} x) + C.$$

用适当的代换法求解下列积分(1766 ~ 1777).

【1766】 $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx$.

解 设 $1 - x = t$,则　$x = 1 - t, dx = -dt$,

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx = -\int (1-t)^2 t^{\frac{1}{3}} dt$$

$$= -\int \left(t^{\frac{1}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^{\frac{7}{3}}\right) dt$$

$$= -\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7} t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10} t^{\frac{10}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{140}(9 + 12x + 14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

【1767】 $\int x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx$.

解 设 $1 - 5x^2 = t$,则　$x^2 = \frac{1}{5}(1-t)$,

$$x^3 dx = \frac{1}{2}(x^2) d(x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}(1-t) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) dt$$

$$= \frac{1}{50}(t-1) dt,$$

所以　$\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx = \frac{1}{50} \int t^{10}(t-1) dt$

$$= \frac{1}{50} \int (t^{11} - t^{10}) dt$$

$$= \frac{1}{600} t^{12} - \frac{1}{550} t^{11} + C$$

$$= \frac{1}{600}(1-5x^2)^{12} - \frac{1}{550}(1-5x^2)^{11} + C.$$

【1768】 $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.

解 设 $2-x=t$,则 $x=2-t, dx=-dt$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = -\int (2-t)^2 \cdot t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= -\int (4t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}})dt$$

$$= -8t^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x} + C.$$

【1769】 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 设 $1-x^2=t$,则 $x^2=1-t$,

$$x^5 dx = \frac{1}{2}(x^2)^2 d(x^2) = -\frac{1}{2}(1-t)^2 dt,$$

所以 $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int (1-t)^2 \cdot t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}})dt$$

$$= -t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2} + C.$$

【1770】 $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$.

解 设 $2-5x^3=t$,则 $x^3=\frac{1}{5}(2-t)$,

$$x^5 dx = \frac{1}{3}x^3 d(x^3) = -\frac{1}{75}(2-t)dt,$$

所以 $$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$$

$$= \frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}(t-2)dt = \frac{1}{75}\int (t^{\frac{5}{3}} - 2t^{\frac{2}{3}})dt$$

$$=\frac{1}{75}\times\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}}-\frac{2}{75}\times\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+C$$

$$=\left[\frac{1}{200}(2-5x^3)-\frac{2}{125}\right](2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C$$

$$=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C.$$

【1771】 $\int\cos^5 x\cdot\sqrt{\sin x}\,dx.$

解 设 $\sin x=t$，则

$$\cos^5 x\,dx=(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)=(1-t^2)^2 dt,$$

所以 $\int\cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$

$$=\int(1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}}\,dt=\int(t^{\frac{1}{2}}-2t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{9}{2}})\,dt$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}+C$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$$

【1772】 $\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$

解 设 $\cos^2 x=t$，则 $\sin x\cos x\,dx=-\frac{1}{2}t,$

$$\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{t}{1+t}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln(1+t)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C.$$

【1773】 $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

解 设 $\tan x=t$，则 $\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$

$$\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+\tan^2 x=1+t^2,$$

所以 $$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int t^2(1+t^2)dt=\int(t^2+t^4)dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C.$$

【1774】 $\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解 设 $1+\ln x=t$,则

$$\frac{\ln x}{x}dx=[(1+\ln x)-1]d(1+\ln x)=(t-1)dt,$$

所以 $$\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int(t-1)t^{-\frac{1}{2}}dt=\int(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})dt$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C.$$

【1775】 $\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$.

解 设 $e^{\frac{x}{2}}=t$,则 $e^x=t^2,dx=\frac{2}{t}dt$,

所以 $$\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}=2\int\frac{dt}{t^2(1+t)}=2\int\left(\frac{1-t}{t^2}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=-\frac{2}{t}-2\ln t+2\ln(1+t)+C$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}-x+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})+C.$$

【1776】 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

解 设 $\sqrt{1+e^x}=t$,则

$$x=\ln(t^2-1),dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

所以 $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int\frac{1}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+C = \ln\left[\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right]+C$$

$$= x - 2\ln(1+\sqrt{1+e^x})+C.$$

【1777】 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

解 设 $\arctan\sqrt{x} = t$,

则 $$dt = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$$

所以 $$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = 2\int t dt = t^2 + C$$

$$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C.$$

运用三角代换 $x = a\sin t, x = a\tan t, x = a\sin^2 t$ 等等，求解下列积分（参数是正数）(1778 ~ 1785).

【1778】 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 因为被积函数的定义域为 $-1 < x < 1$. 故可设

$$x = \sin t \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right),$$

从而 $$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \cos^3 t, dx = \cos t dt,$$

所以 $$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$$

$$= \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

【1779】 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

解 被积函数的定义域为 $x > \sqrt{2}$ 及 $x < -\sqrt{2}$,

(1) 当 $x > \sqrt{2}$ 时，设 $x = \sqrt{2}\sec t \qquad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$,

从而 $$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{2\sec^2 t}{\sqrt{2}\tan t}, dx = \sqrt{2}\sec t \cdot \tan t dt,$$

所以 $$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x=2\int\sec^3t\mathrm{d}t=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)^2\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2}+\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1-\sin^2t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)+C_1$$

$$=\tan t\cdot\sec t+\ln(\sec t+\tan t)+C_1$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C.$$

(2) 当 $x<-\sqrt{2}$ 时,设 $x=\sqrt{2}\sec t$,并限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$ 和上面同样地讨论可得

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

总之 $$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

【1780】 $\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$

解 因为 $|x|\leqslant1$,故设

$$x=\sin t\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

从而 $$\sqrt{1-x^2}=\cos t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t,$$

所以 $$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\cos^2t\mathrm{d}t=\int\frac{1+\cos2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin2t+C=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

【1781】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 因为被积函数的定义域为$-\infty<x<+\infty$,故可设

$$x=a\tan t\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

从而 $(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sec^3 t,\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t.$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\sin t+C$$
$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}+C=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

【1782】 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$.

解 因为$-a<x<a$,故设

$$x=a\sin t\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

从而
$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}=\frac{1+\sin t}{\cos t},$$
$$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t,$$

所以
$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\sin t}{\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$
$$=a(t-\cos t)+C=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

【1783】 $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x$.

解 $0\leqslant x<2a$. 设

$$x=2a\sin^2 t\qquad\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则
$$x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t},\mathrm{d}x=4a\sin t\cos t\mathrm{d}t,$$

代入并利用 1749 题的结果有

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x=8a^2\int\sin^4 t\mathrm{d}t$$

$$= 8a^2\left(\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t\right) + C.$$

而
$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{1-\frac{x}{2a}}$$
$$= \frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)},$$
$$\sin 4t = 2\sin 2t\cos^2 t = 4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)$$
$$= \frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)},$$

因此
$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x$$
$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - 2a^2\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)}$$
$$+\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)} + C$$
$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C.$$

【1784】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

提示:运用代换法 $x-a=(b-a)\sin^2 t$.

解 不妨设 $a<b$,则 $a<x<b$. 设
$$x-a=(b-a)\sin^2 t \qquad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则
$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin t\cos t,$$
$$\mathrm{d}x = 2(b-a)\sin t\cos t\mathrm{d}t,$$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int\mathrm{d}t = 2t + C$$
$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

【1785】 $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$.

解 与上题同样设

$$x-a=(b-a)\sin^2 t,$$

则 $$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x=2(b-a)^2\int\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos 4t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C.$$

而 $$\sin 4t=2\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)$$

$$=4\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}\left(1-2\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$=4\frac{a+b-2x}{(b-a)^2}\sqrt{(x-a)(b-x)},$$

故 $$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

用双曲线代换 $x=a\,\mathrm{sh}t,x=a\,\mathrm{ch}t$ 等,求解下列积分(参数是正数)(1786 ~ 1790).

【1786】 $\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x.$

解 因为 $-\infty<x<+\infty$. 可设 $x=a\mathrm{sh}t$,从而

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\mathrm{ch}t,\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}t\mathrm{d}t,$$

所以 $$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=a^2\int\mathrm{ch}^2 t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\mathrm{ch}2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2t\right)+C_1.$$

而 $$x+\sqrt{a^2+x^2}=a(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)=a\mathrm{e}^t,$$

即 $$t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

又 $$\mathrm{sh}2t=2\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2},$$

因此 $\displaystyle\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$

$$=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

【1787】 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx.$

解 设 $x=a\operatorname{sh}t$

则 $$\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a^2\operatorname{sh}^2t}{a\operatorname{ch}t}=a\frac{\operatorname{sh}^2t}{\operatorname{ch}t},dx=a\operatorname{ch}tdt,$$

所以利用 1761 题的结果有

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=a^2\int\operatorname{sh}^2tdt=a^2\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t-\frac{t}{2}\right)+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

【1788】 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx.$

解 被积函数的定义域为 $x\geqslant a$ 及 $x<-a$.

(1) 当 $x\geqslant a$ 时,设 $x=a\operatorname{ch}t\quad(t\geqslant 0)$,

从而 $$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\operatorname{ch}t-1}{\operatorname{sh}t},dx=a\operatorname{sh}tdt,$$

所以 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$

$$=a\int(\operatorname{ch}t-1)dt=a\operatorname{sh}t-at+C_1$$

$$=a\sqrt{\operatorname{ch}^2t-1}-at+C_1$$

$$=a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}+\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

(2) 当 $x<-a$ 时,可设 $x=-a\operatorname{ch}t\quad(t>0)$,

从而 $$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\operatorname{ch}t+1}{\operatorname{sh}t},dx=-a\operatorname{sh}tdt,$$

所以 $\int\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x=-a\int(\mathrm{ch}t+1)\mathrm{d}t=-a\mathrm{sh}t-at+C_1$

$$=-a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}-x)+C.$$

总之 $\int\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{sgn}x\cdot\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}+|x|)+C.$$

【1789】 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

解 不妨设 $a<b$，被积函数的定义域为 $x>-a$ 及 $x<-b$.

(1) 当 $x>-a$ 时，设

$$x+a=(b-a)\mathrm{sh}^2t,\qquad(t>0)$$

从而 $\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t$,

$$\mathrm{d}x=2(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t\mathrm{d}t,$$

所以 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\int\mathrm{d}t=2t+C_1$,

又 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{b-a}(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)$

$$=\sqrt{b-a}\mathrm{e}^t,$$

所以 $t=\ln\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}$.

故 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C.$

(2) 当 $x<-b$ 时，设

$$x+b=(a-b)\mathrm{sh}^2t,\qquad(t>0)$$

从而 $\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t$,

$$\mathrm{d}x=-2(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t\mathrm{d}t,$$

所以 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=-2\int\mathrm{d}t=-2t+C_1$

$$=-2\ln(\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)})+C.$$

总之 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$

$$=\begin{cases}2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C & 若\ x+a>0\ 及\ x+b>0,\\ -2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})+C & 若\ x+a<0\ 及\ x+b<0.\end{cases}$$

【1790】 $\displaystyle\int\sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x.$

提示:假设 $x+a=(b-a)\mathrm{sh}^2 t.$

解 与上题类似

当 $x>-a$ 时,令

$$x+a=(b-a)\mathrm{sh}^2 t,$$

则 $$\int\sqrt{(x+a)(a+b)}\,\mathrm{d}x=2(b-a)^2\int\mathrm{sh}^2t\,\mathrm{ch}^2t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)^2\int\mathrm{sh}^2 2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(b-a)^2\int(\mathrm{ch}4t-1)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}4t-t\right)+C_1,$$

而 $$\mathrm{sh}4t=4\mathrm{sh}t\cdot\mathrm{ch}t(1+2\mathrm{sh}^2t)$$

$$=4\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\cdot\sqrt{1+\frac{x+a}{b-a}}\left(1+2\,\frac{x+a}{b-a}\right)$$

$$=\frac{4}{(b-a)^2}(2x+a+b)\sqrt{(x+a)(x+b)},$$

所以 $\displaystyle\int\sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}$$

$$+\sqrt{x+b})+C.$$

当 $x<-b$ 时,类似地讨论可得

$$\int\sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}+$$

$$\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}$$

$$+\sqrt{-x-b})+C.$$

运用分部积分法，求解下列积分(1791 ～ 1801).

【1791】 $\int \ln x dx$.

解 $\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$

【1792】 $\int x^n \ln x dx (n \neq -1)$.

解 $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x d(x^{n+1})$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

【1793】 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

解 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx = -\int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x} - 2\int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x} - 2\frac{\ln x}{x} + 2\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C.$$

【1794】 $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$.

解 $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx = \frac{2}{3}\int \ln^2 x d(x^{\frac{3}{2}})$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\ln^2 x - \frac{8}{9}\int \ln x \mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}\ln x} + \frac{8}{9}\int x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C.$$

【1795】 $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

解 $$\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C.$$

【1796】 $\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x.$

解 $$\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x} \cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

【1797】 $\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解 $$\int x^3\mathrm{e}^{-x^2} = -\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}(x^2+1) + C.$$

【1798】 $\int x\cos x\mathrm{d}x.$

解 $$\int x\cos x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

【1799】 $\int x^2 \sin 2x \mathrm{d}x$.

解 $$\int x^2 \sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int x^2 \mathrm{d}(\cos 2x)$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\int 2x \cdot \cos 2x \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int x \mathrm{d}(\sin 2x)$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C.$$

【1800】 $\int x \operatorname{sh} x \mathrm{d}x$.

解 $$\int x\operatorname{sh}x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\operatorname{ch}x) = x\operatorname{ch}x - \int \operatorname{ch}x\mathrm{d}x$$
$$= x\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x + C.$$

【1801】 $\int x^3 \operatorname{ch} 3x \mathrm{d}x$.

解 $$\int x^3\operatorname{ch}3x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int x^3\mathrm{d}(\operatorname{sh}3x)$$
$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \int x^2\operatorname{sh}3x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}(\operatorname{ch}3x)$$
$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x + \frac{2}{3}\int x\operatorname{ch}3x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x + \frac{2}{9}\int x\mathrm{d}(\operatorname{sh}3x)$$
$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x + \frac{2}{9}x\operatorname{sh}3x - \frac{2}{9}\int \operatorname{sh}3x\mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x\right)\operatorname{sh}(3x) - \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x + C.$$

【1802】 $\int \arctan x\mathrm{d}x$.

解 $\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

【1803】 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

解 $\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

【1804】 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解 $\int x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}(x^2)$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \frac{1}{2}x + C$.

【1805】 $\int x^2\arccos x\mathrm{d}x$.

解 $\int x^2\arccos x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \arccos x\mathrm{d}(x^3)$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{6}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

$$= \frac{1}{3}x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2} + C.$$

【1806】 $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.

解 $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \arcsin x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx,$$

令 $x = \frac{1}{t}$,

则有 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt$

$$= -\ln|t+\sqrt{t^2-1}| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

因此 $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\arcsin x - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$

【1807】 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx$.

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

【1808】 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x} dx$.

解 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x} d(x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} + \int\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C.$$

【1809】 $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}(\sqrt{x})$$

$$= (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

【1810】 $\int \sin x\cdot\ln(\tan x)\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin x\cdot\ln(\tan x)\mathrm{d}x = -\int \ln(\tan x)\mathrm{d}(\cos x)$

$$= -\cos x\cdot\ln(\tan x) + \int \cos x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x$$

$$= -\cos x\ln(\tan x) + \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

$$= -\cos x\ln(\tan x) + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

求解下列积分(1811 ~ 1835).

【1811】 $\int x^5 \mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$.

解 $\int x^5\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int x^3\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x^3})$

$$= \frac{1}{3}x^3\mathrm{e}^{x^3} - \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}(x^3-1)\mathrm{e}^{x^3} + C.$$

【1812】 $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.

解 $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$

$$= x(\arcsin x)^2 - 2\int x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x \, \mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int \mathrm{d}x$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

【1813】 $\int x(\arctan x)^2 \mathrm{d}x.$

解 $\int x(\arctan x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\arctan x)^2 \mathrm{d}(x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 + \int \arctan x \mathrm{d}(\arctan x) - \int \arctan x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan x)^2 - x \cdot \mathrm{atctan} x + \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

【1814】 $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x.$

解 $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \ln \frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}(x^3)$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3}\int \frac{x^3}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3}\int \left(-x + \frac{x}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}\ln(1-x^2) + C.$$

【1815】 $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C.$$

【1816】 $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}(1+x^2)$

$$=-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

【1817】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}.$

解 当 $a=0$ 时,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4}=-\frac{1}{3x^3}+C.$$

当 $a\neq 0$ 时,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a}-\frac{1}{a^3}\int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a}-\frac{1}{a^3}\left[-\frac{\frac{x}{a}}{2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{a}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+C.$$

【1818】 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2}+\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}+\int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)-\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

因此 $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

【1819】 $\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a}-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a}-\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x+a\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\mathrm{d}x,$$

所以 $$\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

【1820】 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 $$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(a^2+x^2)$$

$$= \frac{1}{3}\int x\mathrm{d}\left[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{3/2}-\frac{1}{3}\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{a^2}{3}\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

所以,利用 1786 题的结果有

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{a^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\right.$$

$$\left.\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]+C$$

$$=\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

【1821】 $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

解 $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

【1822】 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

解 设$\sqrt{x}=t$

则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t,$

所以 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int e^t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int t\,\mathrm{d}(e^t)$

$$=2te^t-2\int e^t\,\mathrm{d}t=2te^t-2e^t+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

【1823】 $\int x\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解 设$\sqrt{x}=t$,

则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,

所以 $$\int x\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int t^3\sin t\mathrm{d}t=-2\int t^3\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=-2t^3\cos t+6\int t^2\cos t\mathrm{d}t=-2t^3\cos t+6\int t^2\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t-12\int t\cdot\sin t\mathrm{d}t$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12t\cos t-12\int\cos t\mathrm{d}t$$

$$=-2t(t^2-6)\cos t+6(t^2-2)\sin t+C$$

$$=2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+6(x-2)\sin\sqrt{x}+C.$$

【1824】 $\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 $$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}-\int\mathrm{e}^{\arctan x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}-\int\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}x,$$

因此 $$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}+C.$$

【1825】 $\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 利用 1824 题的结果有

$$\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} + \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\arctan x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + C$$

$$= \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + C.$$

【1826】 $\int \sin(\ln x) dx.$

解 $\int \sin(\ln x) dx = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx,$$

因此 $\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$

【1827】 $\int \cos(\ln x) dx.$

解 $\int \cos(\ln x) dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx,$$

因此 $\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$

【1828】 $\int e^{ax} \cos bx \, dx.$

解 如果 $a = b = 0$,则积分为 $x + C$.

如果 $a = 0, b \neq 0$,则积分为$\frac{1}{b}\sin bx + C$,因此,设 $a \neq 0$,

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} \int \cos bx \, d(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bx \, d(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx ax,$$

所以 $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right) + C$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C.$$

【1829】 $\int e^{ax}\sin bx\,dx.$

解 如果 $a=b=0$，则积分为 $x+C$，

如果 $a=0, b\neq 0$，则积分为 $-\frac{1}{b}\cos bx + C$，

下设 $a\neq 0, b\neq 0$，

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}\int \sin bx\,d(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin 6x - \frac{b}{a^2}\int \cos bx\,d(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx,$$

因此 $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

【1830】 $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

解 $$\int e^{2x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\,dx,$$

由 1828 题的结果知

$$\int e^{2x}\cos 2x\,dx = \frac{e^{2x}}{8}(2\cos 2x + 2\sin 2x) + C,$$

所以 $$\int e^{2x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{8}(2\cos 2x + 2\sin 2x) + C$$

$$= \frac{1}{8}e^{2x}(2 - \cos 2x - \sin 2x) + C.$$

【1831】 $\int (e^x - \cos x)^2 dx.$

解 $\int (e^x - \cos x)^2 dx = \int (e^{2x} - 2e^x \cos x + \cos^2 x) dx$

$$= \int e^{2x} dx - 2\int e^x \cos x dx + \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x) dx,$$

由 1828 题知$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + C,$

所以 $\int (e^x - \cos x)^2 dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

【1832】 $\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} dx.$

解 $\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} dx = -\int \operatorname{arccot} e^x d(e^{-x})$

$$= -e^{-x}\operatorname{arccot} e^x - \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$$

$$= -e^{-x}\operatorname{arccot} e^x - \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) dx$$

$$= -e^{-x}\operatorname{arccot} e^x - x + \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x}) + C.$$

【1833】 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$

解 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx = -\int \ln(\sin x) d(\cot x)$

$$= -\cot x \cdot \ln(\sin x) + \int \cot^2 x dx$$

$$= -\cot x \cdot \ln(\sin x) + \int (\csc^2 x - 1) dx$$

$$= -\cot x \cdot \ln(\sin x) - \cot x - x + C.$$

【1834】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

解 $\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\tan x) = x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}x$

$$= x\tan x + \int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

【1835】 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\int xe^x \mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$$= -\frac{xe^x}{x+1} + \int \frac{1}{x+1}e^x(x+1)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

下列积分的求解是要把二次三项式简化成范式，并利用下列公式：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$；

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0)$；

(3) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C$；

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0)$；

(6) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0)$；

(7) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

$(a > 0)$；

(8) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \ (a^2 > 0).$$

求解下列积分(1836 ～ 1849).

【1836】 $\int \frac{dx}{a + bx^2}$ $(ab \neq 0)$.

解 当 $ab > 0$,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \operatorname{sgn}a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \operatorname{sgn}a \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + C.$$

当 $ab < 0$,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \operatorname{sgn}a \cdot \frac{dx}{|a| - |b|x^2}$$

$$= \operatorname{sgn}a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2 - (\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \operatorname{sgn}a \cdot \frac{1}{2\sqrt{|ab|}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}x}{\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}x}\right| + C.$$

【1837】 $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$.

解 $$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$$

【1838】 $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$.

解 $$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\frac{2}{3}+\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}-\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C.$$

【1839】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}$.

解 $$\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-1)}{(x^2-1)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|+C.$$

【1840】 $\int\frac{(x+1)}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

解 $$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1841】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

解 $$\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int\frac{x-\cos\alpha+\cos\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}[(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha]}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}+\cos\alpha\int\frac{\mathrm{d}(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1) + \cot\alpha \cdot \arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + C.$$

$$(\alpha \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

【1842】 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^4 - x^2 + 2}$.

解 $$\int \frac{x^3\,dx}{x^4 - x^2 + 2} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\left[\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right]}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} + \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

【1843】 $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{x^6 - x^3 - 2}$.

解 $$\int \frac{x^5\,dx}{x^6 - x^3 - 2} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\int \frac{d\left[\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

$$- \frac{1}{6}\int \frac{d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}^2\right) - \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x^6 - x^3 - 2|$$

$$- \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\frac{3}{2} + \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2} - \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)} + C\right|$$

$$= \frac{1}{9}\ln[|x^3+1|\cdot(x^3-2)^2]+C.$$

【1844】 $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$.

解 $$\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$$
$$= \int \frac{d(\tan x)}{3\tan^2 x - 8\tan x + 5}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\tan x - \frac{4}{3}\right)}{\left(\tan x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{3} - \left(\tan x - \frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3} + \left(\tan x - \frac{4}{3}\right)}\right| + C_1$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x}\right| + C.$$

【1845】 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$.

解 $$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$$
$$= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2} + 1}$$
$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx}{2\tan\frac{x}{2} + 4 + \sec^2\frac{x}{2}} = 2\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2 + 4}$$
$$= \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2}\right) + C.$$

【1846】 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}\quad (b \neq 0)$.

解 当 $b>0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{b}x)}{\sqrt{a+(\sqrt{b}x)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln|\sqrt{b}x+\sqrt{a+bx^2}|+C.$$

当 $b<0$ 及 $a>0$ 时

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{-b}x)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}x\right)+C.$$

【1847】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

【1848】 $\int\frac{ax}{\sqrt{x+x^2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$$=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+C.$$

【1849】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left| x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + 1} \right| + C.$$

【1850】　证明,若 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$,则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C \quad (当\ a > 0\ 时);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C \quad (当\ a < 0\ 时).$$

证　$y' = 2ax + b$,

当 $a > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \right| + C_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left| \frac{2ax + b}{2a} + \frac{\sqrt{a(ax^2 + bx + c)}}{a} \right| + C_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C.$$

当 $a < 0$ 时

$$\frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C.$$

【1851】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

解 $$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5+x-x^2}}=\int\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left[\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C.$$

【1852】 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$.

解 $$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

【1853】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$.

解 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{17}{16}-\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}+C.$

【1853.1】 $\displaystyle\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}.$

解 $\displaystyle\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$\displaystyle=\arcsin\frac{2\sin x-1}{3}+C.$

【1854】 $\displaystyle\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

解 $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}\mathrm{d}(x^2-1)$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}[(x^2-1)^2-2]}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x-1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1+\sqrt{x^4-2x-1}|+C.$

【1855】 $\displaystyle\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left[\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}+C.$$

【1856】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，

$$x\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\mathrm{sgn}t}{t^2}\sqrt{t^2+t+1},$$

$$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,$$

所以 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\mathrm{sgn}t\cdot\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=-\mathrm{sgn}t\cdot\int\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\mathrm{sgn}t\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C_1$$

$$=-\mathrm{sgn}x\cdot\ln\left|\frac{x+2+2(\mathrm{sgn}x)\sqrt{x^2+x+1}}{2x}\right|+C_1.$$

当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C.$$

当 $x<0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{2x}{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{2x(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}{(x+2)^2-4(x^2+x+1)}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C$$

总之，$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C.$$

【1857】 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$，

则　$$x^2\sqrt{x^2+x-1}=-\operatorname{sgn}t\cdot\frac{\sqrt{1+t-t^2}}{t^3},$$

$$dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

所以　$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=-\operatorname{sgn}t\cdot\int\frac{t}{\sqrt{1+t-t^2}}dt$$

$$=-\operatorname{sgn}t\cdot\left[-\frac{1}{2}\int\frac{(1+t-t^2)'}{\sqrt{1+t-t^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}\right]$$

$$=-\operatorname{sgn}t\cdot\left(-\sqrt{1+t-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$=\operatorname{sgn}x\cdot\left[\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{|x|}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}x}\right]+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}|x|}+C.$$

【1858】 $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解　设 $y=x+1$，且设 $x+1>0$，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2-2y+2}}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{2}{y^2}-\frac{2}{y}+2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}}\right| + C_1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2-y}{2y}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{y^2-2y+2}}{2y}\right| + C_1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right| + C.$$

当 $x+1<0$ 时,类似地讨论可得相同结果.

【1859】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

解 设 $x-1=\frac{1}{t}$,

则 $$(x-1)\sqrt{x^2-2} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{|t|},$$

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,$$

所以 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = -\operatorname{sgn}t\cdot\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$= -\operatorname{sgn}t\cdot\int \frac{\mathrm{d}(t-1)}{\sqrt{2-(t-1)^2}}$$

$$= -\operatorname{sgn}t\cdot\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \arcsin\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}\,|x-1|}\right) + C.$$

【1860】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

解 设 $x+2=\dfrac{1}{t}$，

则 $$(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}=\frac{\sqrt{1-2t-5t^2}}{t^3\operatorname{sgn}t},$$

$$dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

所以
$$\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x-5}}=-\operatorname{sgn}t\int\frac{tdt}{\sqrt{1-2t-5t^2}}$$
$$=-\frac{\operatorname{sgn}t}{\sqrt{5}}\int\frac{\left(t+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(t+\frac{1}{5}\right)^2}}dt$$
$$=\frac{\operatorname{sgn}t}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\frac{6}{25}-\left(t+\frac{1}{5}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(t+\frac{1}{5}\right)^2}}+\frac{\operatorname{sgn}t}{5\sqrt{5}}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(t+\frac{1}{5}\right)^2}}$$
$$=\frac{\operatorname{sgn}t}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}t-t^2}+\frac{\operatorname{sgn}t}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5t+1}{\sqrt{6}}+C$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{x+7}{\sqrt{6}\,|x+2|}\right)+C.$$

【1861】 $\int\sqrt{2+x-x^2}dx$.

解 $$\int\sqrt{2+x-x^2}dx$$
$$=\int\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$$
$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.$$

【1862】 $\int\sqrt{2+x+x^2}dx$.

解 $\int\sqrt{2+x+x^2}=\int\sqrt{\frac{7}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{2+x+x^2}\right)+C.$

【1863】 $\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\mathrm{d}x.$

解 $\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x^2+1)^2-2}\,\mathrm{d}(x^2+1)$

$=\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}$

$-\frac{1}{2}\ln(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1})+C.$

【1864】 $\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 首先考虑

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}}.$$

设 $x=\frac{1}{t}>0$,

则 $x\sqrt{1+x-x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{t^2}$,

$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

所以 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t-1}}$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}$$

$$=-\ln\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{t^2+t-1}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|+C.$$

对于 $x<0$,可得到同样的结果,而

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

因此 $$\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}+\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$$

$$-\sqrt{1+x-x^2}+C.$$

【1865】 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\operatorname{sgn}x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x$$

$$=\operatorname{sgn}x\cdot\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$$

$$= \operatorname{sgn}x \cdot \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right|+C_1$$

$$= \operatorname{sgn}x \cdot \ln\left|\frac{x^2-1+\operatorname{sgn}x \cdot \sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C.$$

§2. 有理函数的积分法

运用待定系数法求解下列积分(1866 ~ 1889).

【1866】 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x.$

解 设 $\displaystyle\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5},$

则 $2x+3 = A(x+5)+B(x-2),$

解之得 $A=1, B=1,$

所以 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)\mathrm{d}x$

$= \ln|(x-2)(x+5)|+C.$

【1867】 $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

解 设 $\displaystyle\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3},$

通分并比较两边的分子有

$$x = A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2).$$

在上面恒等式中令

$x=-1$ 得 $-1=2A, A=-\dfrac{1}{2};$

$x=-2$ 得 $-2=-B, B=2;$

$x=-3$ 得 $-3=2C, C=-\dfrac{3}{2}.$

所以
$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{-\frac{3}{2}}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C.$$

【1868】 $\int\frac{x^{10}\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

解
$$\frac{x^{10}}{x^2+x-2}$$
$$=x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x+171$$
$$+\frac{-341x+342}{x^2+x-2}.$$

设
$$\frac{-341x+342}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1},$$

则
$$-341x+342=A(x-1)+B(x+2).$$

令 $x=-2$ 得
$$1024=-3A,A=-\frac{1024}{3},$$

令 $x=1$ 得
$$1=3B,B=\frac{1}{3},$$

所以
$$\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$$
$$=\int\Big[x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x$$
$$+171-\frac{1024}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}\Big]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21}{4}x^4+\frac{43}{3}x^3$$

$$-\frac{85}{2}x^2+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|+C.$$

【1869】 $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x.$

解 $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$

$$=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}.$$

设 $$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3},$$

所以 $5x^2-6x+1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2).$

在上面恒等式中

令 $x=0$ 得 $1=6A,A=\frac{1}{6}$,

令 $x=2$ 得 $9=-2B,B=-\frac{9}{2}$,

令 $x=3$ 得 $28=3C,C=\frac{28}{3}.$

所以 $$\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left[1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$$

【1870】 $\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x.$

解 $\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}=1+\frac{-(5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}$

$$=1-\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

设 $$-\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+4},$$

从而 $-(5x^2+4)=(A_1x+B_1)(x^2+4)$

$$+(A_2x+B_2)(x^2+1).$$

比较两边同次幂的系数，得

$$A_1+A_2=0,$$
$$B_1+B_2=-5,$$
$$4A_1+A_2=0,$$
$$4B_1+B_2=-4,$$

解之得 $A_1=A_2=0, B_1=\frac{1}{3}, B_2=-\frac{16}{3}.$

所以 $\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$

$$=\int\left[1+\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{16}{3(x^2+4)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=x+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

【1871】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}.$

解 设 $\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2},$$

则有 $x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2.$

令 $x=1$ 得 $1=3B, B=\frac{1}{3},$

令 $x=-2$ 得 $-2=9C, C=-\frac{2}{9}.$

比较两边 x^2 的系数得 $A+C=0$，从而 $A=\frac{2}{9}$，所以

$$\int\frac{x}{x^3-3x+2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left[\frac{2}{9(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{2}{9(x+2)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C.$$

【1872】 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x.$

解 设$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$

$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$,

从而有

$$x^2+1=A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2.$$

令 $x=-1$ 得 $2=-2B, B=-1$,

令 $x=1$ 得 $2=4C, C=\frac{1}{2}$.

比较两边 x^2 的系数得 $A+C=1$,从而 $A=\frac{1}{2}$,所以

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

【1873】 $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2\mathrm{d}x.$

解 $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-2)}+\frac{D}{(x-2)^2}.$$

通分并比较两边的分子有

$$x^2=A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2$$
$$+C(x-1)^2(x-2)+D(x-1)^2.$$

令 $x=1$ 得 $B=1$,

令 $x=2$ 得 $D=4$.

比较两边 x^3 及 x^2 的系数,得

$$A+C=0, -5A+B-4C+D=1,$$

解之得 $A=4, C=-4$.

所以
$$\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$$
$$=\int\left[\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-2)}+\frac{4}{(x-2)^2}\right]dx$$
$$=4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+C$$
$$=4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+C.$$

【1874】 $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

解 设
$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$
$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+3)}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3},$$

所以有
$$\begin{aligned}1=&A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+2)(x+3)^3\\&+C(x+1)(x+3)^3+D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2\\&+E(x+1)(x+2)^2(x+3)+F(x+1)(x+2)^2\end{aligned}$$

令 $x=-1$ 得 $1=8A, A=\frac{1}{8}$,

令 $x=-2$ 得 $1=-C, C=-1$,

令 $x=-3$ 得 $1=-2F, F=-\frac{1}{2}$.

比较两边 x^5, x^4 及 x^3 的系数,得
$$A+B+D=0,$$
$$13A+12B+C+11D+E=0,$$
$$67A+56B+10C+47D+8E+F=0,$$

解之得 $B=2, D=-\frac{17}{8}, E=-\frac{5}{4}$. 所以
$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$= \int \left[\frac{1}{8(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{17}{8(x+3)} - \frac{5}{4(x+3)^2} - \frac{1}{2(x+3)^3} \right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} - \frac{17}{8}\ln|x+3| + \frac{5}{4}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{4(x+3)^2} + C.$$

【1875】 $\int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}$.

解 $$\frac{1}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3},$$

所以 $$1 = A(x-1)(x+1)^3 + B(x+1)^3 + C(x-1)^2(x+1)^2 + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2.$$

令 $x = 1$ 得 $1 = 8B, B = \frac{1}{8}$,

令 $x = -1$ 得 $1 = 4E, E = \frac{1}{4}$,

令 $x = 0$ 得 $-A + B + C + D + E = 1$,

令 $x = 2$ 得 $27A + 27B + 9C + 9D + E = 1$,

令 $x = -2$ 得 $3A - B + 9C - 9D + 9E = 1$.

解之得 $A = -\frac{3}{16}, C = \frac{3}{16}, D = \frac{1}{4}$. 因此

$$\int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x + x + 1}$$

$$= \int \left[-\frac{3}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3}{16(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^3} \right] dx$$

$$= -\frac{3}{16}\ln|x-1| - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{3}{16}\ln|x+1|$$

$$-\frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)^2} + C$$

$$= \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2} + C.$$

【1876】 $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx.$

解 $\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x+4} = \frac{x^2+5x+4}{(x^2+1)(x^2+4)}$

$$= \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+4},$$

从而 $x^2+5x+4 = (A_1x+B_1)(x^2+4)+(A_2x+B_2)(x^2+1).$

故 $A_1+A_2=0,$

$B_1+B_2=1,$

$4A_1+A_2=5,$

$4B_1+B_2=4,$

解之得 $A_1=\frac{5}{3}, B_1=1, A_2=-\frac{5}{3}, B_2=0$. 于是

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x+4}dx = \int\left(\frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1} + \frac{-\frac{5}{3}x}{x^2+4}\right)dx$$

$$= \frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4} + \arctan x + C.$$

【1877】 $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$

则 $1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1).$

令 $x=0$ 得 $A+C=1,$

令 $x=-1$ 得 $2A=1,$

令 $x=1$ 得 $2A+2B+2C=1.$

解之得 $A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2},C=\frac{1}{2}$. 所以

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

【1878】 $\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

解 $$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$
$$=\frac{(x^2-4x+5)-(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$
$$=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x^2-4x+5)},$$

所以 $$\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$
$$=\int\frac{1}{(x-2)^2}dx-\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}$$
$$=-\frac{1}{x-2}-\arctan(x-2)+C.$$

【1879】 $\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

解 设 $$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$
$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

通分并比较两边的分子得

$$x=A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

令 $x=0$ 得 $-2A+2B+D=0$，

令 $x=1$ 得 $5B=1$，

令 $x=-1$ 得 $-2A+B-4C+4D=-1$，

令 $x=2$ 得 $10A+10B+2C+D=2$.

解之得　$A=\frac{1}{25},B=\frac{1}{5},C=-\frac{1}{25},D=-\frac{8}{25}$.

所以
$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$
$$=\int\left[\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{5(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{25}x-\frac{8}{25}}{x^2+2x+2}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$
$$-\frac{7}{25}\int\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}$$
$$-\frac{7}{25}\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$$
$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\ln(x^2+2x+2)$$
$$-\frac{7}{25}\arctan(x+1)+C$$
$$=\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{7}{25}\arctan(x+1)+C.$$

【1880】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

解
$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{(1+x+x^2)-x(1+x)}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$
$$=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2},$$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1881】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

解 设$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$,则有

$$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

令 $x=-1$ 得 $3A=1$,

令 $x=0$ 得 $A+C=1$,

令 $x=1$ 得 $A+2B+2C=1$.

解之得 $A=\frac{1}{3}$,$B=-\frac{1}{3}$,$C=\frac{2}{3}$. 所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int\left(\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1882】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

解 $\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$,

从而有 $x = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$

令 $x=1$ 得 $3A=1$,

令 $x=0$ 得 $A-C=0$,

令 $x=-1$ 得 $A+2B-2C=-1.$

解之得 $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{1}{3}$. 所以

$$\int \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1883】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

【1884】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

解 设$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

所以 $1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(\mathrm{d}x+D)(x^2+\sqrt{2}x+1).$

比较两边的系数并解方程得

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{\sqrt{2}}{4}, D=\frac{1}{2}.\text{ 所以}$$

$$\int\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.+\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+C.$$

【1885】 $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

解 设$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$,则有

$$1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

比较两边 x 的同次幂系数得

$$A+C=0,$$
$$-A+B+C+D=0,$$
$$A-B+C+D=0,$$
$$B+D=1.$$

解之得 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{2},C=-\frac{1}{2},D=\frac{1}{2}$. 所以

$$\int\frac{1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+x+1}-\int\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right.$$

$$\left.+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right] + C.$$

【1886】 $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

解 本题如果用待定系数法来解,计算相当麻烦.用其它技巧来解则较为简单.

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{x^2-2}{3(x^4-x^2+1)},$$

所以 $$\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x^2-2}{x^4-x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{6}\int \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\arctan x + \frac{1}{6}\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\arctan x + \frac{1}{6}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$= \frac{1}{3}\arctan x + \frac{1}{6}\arctan\frac{x^2-1}{x} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + C.$$

【1887】 $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

解 设$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$

$$=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1},$$

从而有 $1=A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)$

$+B(x^2+1)(x^2-x+1)$

$+(Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1)$

$+(Ex+F)(1+x)^2(x^2+1)$.

比较上式两端 x 的同次幂的系数有

$A+C+E=0$,

$B+C+D+2E+F=0$,

$A+D+2E+2F-B=0$,

$A+2B+C+2E+2F=0$,

$-B+C+D+E+2F=0$,

$A+B+D+F=1$,

解之得 $A=\frac{1}{3},B=\frac{1}{6},C=0,D=\frac{1}{2},E=-\frac{1}{3},F=0$

所以 $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$

$$=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{6(x+1)^2}+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{x}{3(x^2-x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\arctan x$$

$$-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1888】 $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

解 $\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$

$$= \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1},$$

则有 $\quad 1 = A(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$+ (Bx+C)(x-1)(x^2-x+1)$$

$$+ (Dx+E)(x-1)(x^2+x+1).$$

比较系数得

$$A+B+D=0,$$

$$-2B+C+E=0,$$

$$A+2B-2C=0,$$

$$B+2C-D=0,$$

$$A-C-E=1,$$

解之得 $\quad A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=-\frac{1}{6}, D=0, E=-\frac{1}{2}$. 所以

$$\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2-1}$$

$$= \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2-x+1)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

【1889】 $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

解 $\quad \displaystyle\frac{x^2}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$

$$= \frac{x^2}{(x^2+2x+2)\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+\frac{1}{2}},$$

从而有

$$x^2=(Ax+B)\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较系数得

$$A+C=0,$$
$$A+B+2C+D=1,$$
$$\frac{A}{2}+B+2C+2D=0,$$
$$\frac{B}{2}+2D=0,$$

解之得 $A=\frac{4}{5}, B=\frac{12}{5}, C=-\frac{4}{5}, D=-\frac{3}{5}$. 所以

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$$
$$=\int\left[\frac{4(x+3)}{5(x^2+2x+2)}-\frac{4x+3}{5\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{5}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x+\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$$
$$-\frac{2}{5}\int\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}+\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$$
$$-\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}{x^2+x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\arctan(x+1)$$
$$-\frac{2}{5}\arctan(2x+1)+C.$$

【1890】 在什么条件下，积分$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\mathrm{d}x$是有理函数？

解 设

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2},$$

从而有 ax^2+bx+c

$$=Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3.$$

比较系数得

$$A+D=0,$$
$$-2A+B-D+E=0,$$
$$A-2B+C=a,$$
$$B-2C=b,$$
$$C=c,$$

解之得 $A=a+2b+3c, B=b+2c, C=c, D=-(a+2b+3c)$，$E=a+b+c$.

当$A=D=0$，即$a+2b+3c=0$时，积分$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\mathrm{d}x$为有理函数.

利用奥斯特罗格拉斯基法求解以下积分(1891 ~ 1897).

【1891】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

解 设

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2}\right)'+\frac{Dx+E}{(x-1)(x+1)},$$

从而有 $x=(2Ax+B)(x-1)(x+1)$

$$-(3x-1)(Ax^2+Bx+C)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

比较系数得

$$D=0,$$
$$-A+D+E=0,$$
$$A-2B-D+E=0,$$
$$-2A-3C+B-D-E=1,$$
$$-B+C-E=0,$$

解之得 $A=-\frac{1}{8},B=-\frac{1}{8},C=-\frac{1}{4},D=0,E=-\frac{1}{8}$. 所以

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$$
$$=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$$
$$=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

* 关于奥氏方法,可参见菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷一分册.

【1892】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}$.

解 $(x^3+1)^2=(x+1)^2(x^2-x+1)^2$,设

$$\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1},$$

从而
$$1=(2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)$$
$$+(Dx^2+Ex+F)(x^3+1).$$

比较系数得

$$D=0,$$
$$-A+E=0,$$
$$-2B+F=0,$$
$$-3C+D=0,$$
$$2A+E=0,$$
$$B+F=1,$$

解之得 $A=0,B=\frac{1}{3},C=0,D=0,E=0,F=\frac{2}{3}$. 所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}$$

$$=\frac{x}{3(x^2+1)}+\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$$

$$=\frac{x}{3(x^2+1)}+\frac{2}{3}\int\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{3(x^2+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1893】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$.

解 设$\frac{1}{(x^2+1)^3}=\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right)'+\frac{Ex+F}{x^2+1}$,

从而 $$1=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)-4x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(Ex+F)(x^2+1)^2.$$

比较系数得

$$E=0,$$
$$-A+F=0,$$
$$-2B+2E=0,$$
$$3A-3C+2F=0,$$
$$2B-4D+E=0,$$
$$C+F=1,$$

解之得 $A=\frac{3}{8},B=0,C=\frac{5}{8},D=0,E=0,F=\frac{3}{8}$. 所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\arctan x+C.$$

【1894】 $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$.

解 设$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$,

从而 $$x^2 = A(x^2+2x+2) - 2(x+1)(Ax+B) + (Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较系数得

$$C = 0,$$
$$-A + 2C + D = 1,$$
$$-2B + 2C + 2D = 0,$$
$$2A - 2B + 2D = 0,$$

解之得 $A = 0, B = 1, C = 0, D = 1$. 所以

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$$
$$= \frac{1}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) + C.$$

【1895】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

解 设 $$\frac{1}{(x^4+1)^2} = \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}\right)' + \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1},$$

从而有 $$1 = (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1) - 4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D) + (Ex^3+Fx^2+Gx+H)(x^4+1)$$

比较系数得

$$E = 0,$$
$$-A + F = 0,$$
$$-2B + G = 0,$$
$$-3C + H = 0,$$
$$-4D + E = 0,$$
$$3A + F = 0,$$
$$2B + G = 0,$$
$$C + H = 1,$$

解之得 $A=B=D=E=F=G=0$,

$C=\frac{1}{4}, H=\frac{3}{4}$. 所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$$

由 1884 题的结果有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+C,$$

因此 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$
$$+\frac{3\sqrt{2}}{16}\left[\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+C.$$

【1896】 $\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 设 $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

$$=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

从而有 $$x^2+3x-2=A(x-1)(x^2+x+1)$$
$$-(Ax+B)(2x+1)(x-1)$$
$$+(Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1).$$

比较系数得

$C=0$,

$-A+C+D=0$,

$A-2B+C+D+E=1$,

$A+B+D+E=3$,

$-A+B+E=2$,

解之得 $A=\frac{5}{3}, B=\frac{2}{3}, C=0, D=\frac{5}{3}, E=-1$. 所以

$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\int\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{2x-11}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\ln|x-1|$$

$$-\frac{1}{9}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

$$+\frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1897】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3}$.

解 设$\frac{1}{(x^4-1)^3}=\left[\frac{P_1(x)}{(x^4-1)^2}\right]'+\frac{P_2(x)}{x^4-1}$,其中

$$P_1(x)=A_7x^7+A_6x^6+A_5x^5+A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0,$$

$$P_2(x)=B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0,$$

利用待定系数法可得

$$A_7=A_6=A_4=A_3=A_2=A_0=0,$$

$$B_3=B_2=B_1=0,$$

$A_5=\frac{7}{32},A_1=-\frac{11}{32},B_0=\frac{21}{32}$.所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{32}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$$

$$=\frac{7x^5-11}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{64}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{7x^5-11}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\arctan x+C.$$

分出下列积分的代数部分(1898 ～ 1902).

【1898】 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$

解 设$\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}+\int\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x,$$

上式右端的积分为非代数部分,因此只要求出 A,B,C,D. 等式两边求导数,得

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$$
$$=\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}\right)'+\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1},$$

从而
$$\begin{aligned}x^2+1=&(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1)\\&-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\\&+(A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1)(x^4+x^2+1).\end{aligned}$$

比较系数可得 $A=\frac{1}{6},B=0,C=\frac{1}{3},D=0$,因此,所求积分的代数部分为$\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$.

【1899】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+x+1)^3}.$

解 设$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+x+1)^3}$

$$=\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^3+x+1)^2}$$
$$+\int\frac{A_1x^2+B_1x+C_1}{x^3+x+1}\mathrm{d}x,$$

两边求导数得

$$\frac{1}{(x^3+x+1)^3}$$

$$= \left[\frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^3 + Ex + F}{(x^3 + x + 1)^2}\right]' + \frac{A_1x^2 + B_1x + C_1}{x^3 + x + 1},$$

从而有 $$1 = (5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E)(x^3 + x + 1) - 2(3x^2 + 1)(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) + (A_1x^2 + B_1x + C_1)(x^3 + x + 1)^2,$$

比较系数并解之得

$$A = -\frac{243}{961}, B = \frac{357}{1922}, C = -\frac{405}{961}, D = -\frac{315}{1922}, E = \frac{156}{961},$$

$$F = -\frac{224}{961}, A_1 = 0, B_1 = -\frac{243}{961}, C_1 = \frac{357}{961}.$$

所求积分的代数部分为

$$\frac{-486x^5 + 357x^4 - 810x^3 - 315x^2 + 312x - 448}{1922(x^3 + x + 1)^2}.$$

【1900】 $\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}\mathrm{d}x.$

解 设$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}\mathrm{d}x = \frac{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{x^5 + x + 1} + \int \frac{A_1x^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1}{x^5 + x + 1}\mathrm{d}x,$$

求导数得

$$\frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} = \left(\frac{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{x^5 + x + 1}\right)' + \frac{A_1x^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1}{x^5 + x + 1}.$$

从而有 $$4x^5 - 1 = (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D)(x^5 + x + 1) - (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)(x^5 + x + 1)$$

$$+(A_1x^4+B_1x^3+C_1x^2+D_1x+E_1)(x^5+x+1).$$

比较系数并解之得 $D=-1$，其它系数均为0，因此，所求积分的代数部分为 $-\dfrac{x}{x^5+x+1}$.

【1901】 求解积分：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

解 因为 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$

所以设
$$\frac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

从而有
$$1=A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

比较系数得

$$C=0$$
$$-A+C+D=0$$
$$-2B+C+D=0$$
$$A-B+D=1$$

解之得 $A=\dfrac{2}{3},B=\dfrac{1}{3},C=0,D=\dfrac{2}{3}$.

所以
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}&=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\\&=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\&=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

【1902】 在什么条件下积分 $\displaystyle\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\mathrm{d}x$ 是有理

函数?

解 (1) 当 $a \neq 0$,且 $b^2 - ac = 0$ 时

$$ax^2 + 2bx + c = a(x - x_0)^2,$$

其中 $x_0 = \dfrac{b}{a}$ 为实数,此时

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + bx + c)^2}\\&= \frac{\alpha(x - x_0)^2 + 2\beta(x - x_0) + 2\alpha x_0(x - x_0) + \alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma}{a^2(x - x_0)^4}\\&= \frac{\alpha}{a^2(x - x_0)^2} + \frac{2\beta + 2\alpha x_0}{a^2(x - x_0)^3} + \frac{\alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma}{a^2(x - x_0)^4}.\end{aligned}$$

从而积分为有理函数.

(2) 当 $a \neq 0$,且 $b^2 - ac \neq 0$,设

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + bx + c)^2}\\&= \left(\frac{Ax + B}{ax^2 + 2bx + c}\right)' + \frac{Cx + D}{ax^2 + 2bx + c},\end{aligned}$$

从而有 $\quad \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = A(ax^2 + 2bx + c) - (Ax + B)(2ax + 2b)$

$$+ (Cx + D)(ax^2 + 2bx + c).$$

比较系数并解方程得 $C = 0$

$$D = \frac{2b\beta - a\gamma - c\alpha}{2(b^2 - ac)}.$$

从而当 $D = 0$,即 $2b\beta = a\gamma + c\alpha$ 时,积分为有理函数.

(3) 当 $a = 0, b \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2}\\&= \frac{\alpha\left(x + \frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{\alpha c}{b}\left(x + \frac{c}{2b}\right) + \frac{\alpha c^2}{4b^2} + 2\beta\left(x + \frac{c}{2b}\right) - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2\left(x + \frac{c}{2b}\right)^2}\\&= \frac{\alpha}{4b^2} + \frac{2\beta - \frac{\alpha c}{b}}{4b^2\left(x + \frac{c}{2b}\right)} + \frac{\frac{\alpha c^2}{4b^2} - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2\left(x + \frac{c}{2b}\right)^2}.\end{aligned}$$

故当 $2\beta-\frac{\alpha c}{b}=0$，即 $\alpha c=2b\beta$ 时，积分为有理函数，这种情可归并到情况(2)，即 $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 中去.

(4) 当 $a=b=0, c\neq 0$ 时，积分显然为有理函数，这种情况可包含在 $b^2-ac=0$ 中.

综上所述，当 $b^2-ac=0$ 或 $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 时，积分为有理函数.

运用不同的方法求解下列积分(1903 ~ 1920).

【1903】 $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x=\int\frac{[(x-1)+1]^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$$
$$=\int\left[\frac{1}{(x-1)^{97}}+\frac{3}{(x-1)^{98}}+\frac{3}{(x-1)^{99}}+\frac{1}{(x-1)^{100}}\right]\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}$$
$$-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.$$

【1904】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^8-1}.$

解 $$\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^8-1}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^4-1}$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(x^2)^2-1}-\frac{1}{(x^2)^2+1}\right)\mathrm{d}(x^2)$$
$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\arctan(x^2)+C.$$

【1905】 $\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8+3}.$

解 $$\int\frac{x^3}{x^8+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^4)}{(x^4)^2+3}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x^4}{\sqrt{3}}+C.$$

【1906】 $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^3+1}$

$$=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2+1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\int\frac{x^2-2}{(x^2)^2-x^2+1}\mathrm{d}(x^2)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{12}\ln\frac{(1+x^2)^2}{x^4-x^2+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1907】 $\displaystyle\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x.$

解 设 $x=\dfrac{1}{t}$,

则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$

所以 $\displaystyle\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\frac{1}{t^4}-3}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t^8}+\frac{3}{t^4}+2\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{(3t^4-1)t^3}{2t^8+3t^4+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{4}{t^4+1}-\frac{5}{2t^4+1}\right)\mathrm{d}t^4$$

$$=\ln(t^4+1)-\frac{5}{8}\ln(2t^4+1)+C$$

$$=\ln\frac{x^4+1}{x^4}-\frac{5}{8}\ln\frac{x^4+2}{x^4}+C.$$

【1908】 $\displaystyle\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{(x^{10}-10)^2}.$

解 $\displaystyle\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{(x^{10}-10)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5)}{(x^5-\sqrt{10})^2(x^5+\sqrt{10})^2}$

$$=\frac{1}{200}\int\left[\frac{(x^5+\sqrt{10})-(x^5-\sqrt{10})}{(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})}\right]^2\mathrm{d}(x^5)$$

$$=\frac{1}{200}\int\left[\frac{1}{x^5-\sqrt{10}}-\frac{1}{x^5+\sqrt{10}}\right]^2\mathrm{d}(x^5)$$

$$=\frac{1}{200}\int\frac{\mathrm{d}(x^5-\sqrt{10})}{(x^5-\sqrt{10})^2}-\frac{1}{100}\int\frac{\mathrm{d}(x^5)}{(x^5)^2-10}$$

$$+\frac{1}{200}\int\frac{\mathrm{d}(x^5+\sqrt{10})}{(x^5+\sqrt{10})^2}$$

$$=-\frac{1}{200(x^5-\sqrt{10})}-\frac{1}{200(x^5+\sqrt{10})}$$

$$+\frac{1}{200\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5+\sqrt{10}}{x^5-\sqrt{10}}\right|+C.$$

【1909】 $\int\frac{x^{11}\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}$.

解 $$\int\frac{x^{11}\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}=\int\frac{\frac{1}{4}x^8\mathrm{d}(x^4)}{(x^4+1)(x^4+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1-\frac{3x^4+2}{(x^4+1)(x^4+2)}\right]\mathrm{d}(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{x^4+1}-\frac{4}{x^4+2}\right]\mathrm{d}(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}\ln(x^4+1)-\ln(x^4+2)+C.$$

【1910】 $\int\frac{x^9\mathrm{d}x}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

解 $$\int\frac{x^9\mathrm{d}x}{(x^{10}+2x^5+2)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{x^5\mathrm{d}(x^5)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{(x^5+1)\mathrm{d}(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$=-\frac{1}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{5}\left\{\frac{x^5+1}{2[(x^5+1)^2+1]}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\arctan(x^5+1)\Big\}+C^*$$

$$=-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C.$$

(*)利用 1817 题的结果.

【1911】 $\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx.$

解 当 $n=0$ 时,

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}=\int\frac{dx}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

当 $n\neq 0$ 时,

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx=\frac{1}{n}\int\frac{x^n}{x^n+1}d(x^n)$$

$$=\frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{x^n+1}\right)d(x^n)$$

$$=\frac{1}{n}[x^n-\ln|x^n+1|]+C.$$

【1912】 $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx.$

解 当 $n=0$ 时,

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\ln|x|+C.$$

当 $n\neq 0$ 时,

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$=\int\frac{x^{2n}\cdot x^{n-1}dx}{(x^{2n}+1)^2}=\frac{1}{n}\int\frac{x^{2n}d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{x^{2n}+1-1}{(x^{2n}+1)^2}d(x^n)$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{d(x^n)}{(x^n)^2+1}-\frac{1}{n}\int\frac{d(x^n)}{[(x^n)^2+1]^2}$$

$$=\frac{1}{n}\arctan(x^n)-\frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{2(x^{2n}+1)}+\frac{1}{2}\arctan(x^n)\right]^*$$

$$+C$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\arctan(x^n)-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right]+C.$$

(*) 利用 1817 题的结果.

【1913】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)}=\frac{1}{2}\int\frac{x^{10}+2-x^{10}}{x(x^{10}+2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{20}\int\frac{\mathrm{d}(x^{10}+2)}{x^{10}+2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{20}\ln(x^{10}+2)+C$$

$$=\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}+C.$$

【1914】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$.

解 因为

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x(x^{10}+1)}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$$

$$=\frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

所以 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{10}\ln(x^{10}+1)+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C.$$

【1915】 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^7+1)-2x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-2\int\frac{x^6\mathrm{d}x}{1+x^7}$$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C.$$

【1916】 $\int\frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5-5x}-\frac{1}{x^5-5x+1}\right)\mathrm{d}(x^5-5x)$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5-5x)}{x^5-5x}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5-5x+1)}{x^5-5x+1}$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|+C.$$

【1917】 $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x.$

解 因为

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}$$

$$=\frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right),$$

所以 $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1918】 $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}+C.$$

【1919】 $\int\frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x.$

解 令 $x^2=t$,则

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{t^4+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{t}-\sqrt{2}}{t+\frac{1}{t}+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}+C.$$

【1920】 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x = \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1}$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{(x^3)}{(x^3)^2+1}$$

$$= \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C.$$

【1921】 推导出计算下列积分的递推公式:

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a \neq 0),$$

利用这个公式计算

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}.$$

提示:利用恒等式

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2+(4ac-b^2).$$

解 由于

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)$$
$$=t^2+\Delta,$$

其中 $\quad t=2ax+b,\Delta=4ac-b^2,$

于是 $\quad I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{(4a)^n\mathrm{d}x}{[(2ax+b)^2+\Delta]^n}$

$$=2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n},$$

记 $\quad J_n=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n},$

当 $\Delta\neq 0$ 时，对 J_n 应用分部积分法，得

$$J_n=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^{n+1}}$$
$$=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{t^2+\Delta-\Delta}{(t^2+\Delta)^{n+1}}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}-2n\Delta\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^{n+1}}$$
$$=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2nJ_n-2n\Delta J_{n+1},$$

从而有 $\quad J_{n+1}=\frac{1}{2n\Delta}\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{\Delta}J_n,$

所以 $\quad J_n=\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{\Delta}J_{n-1}.$

代入 I_n 中，得

$$I_n=2^{2n-1}a^{n-1}\cdot\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{\Delta}J_{n-1}\right\}$$
$$=2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\frac{2a}{(4a)^{n-1}}\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right\}$$
$$=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

因此，递推公式为

$$I_n=\frac{1}{(n-1)\Delta}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

当 $\Delta=0$ 时,则有

$$\begin{aligned}I_n&=\int\frac{(4a)^n}{(2ax+b)^{2n}}\mathrm{d}x\\&=2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\int\frac{\mathrm{d}(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}}\\&=-\frac{2^{2n-1}a^{n-1}}{2n-1}\cdot\frac{1}{(2ax+b)^{2n-1}}+C,\end{aligned}$$

对于 I_3,因为 $\Delta=4ac-b^2=3\neq 0$,两次应用递推公式得

$$\begin{aligned}I_3&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}\\&=\frac{2x+1}{2\cdot 3(x^2+x+1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}\\&=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\\&=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\\&\quad+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\&=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\\&\quad+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

【1922】 运用代换 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$ 计算积分

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}(m \text{ 和 } n \text{ 为自然数}).$$

利用这个代换求解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

解 设 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$,

则 $$1-t=\frac{b-a}{x+b},$$

即 $$x+b=\frac{b-a}{1-t},\mathrm{d}x=\frac{b-a}{(1-t)^2}\mathrm{d}t,$$

$$(x+a)=t(x+b)=\frac{(b-a)t}{1-t},$$

代入 I 中得

$$I=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}\mathrm{d}t\qquad(a\neq b).$$

将 $(1-t)^{m+n-2}$ 展开,并逐项求积分,即可得 I

在 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x+3)^3}$ 中,$a=-2,b=3,m=2,n=3$.

设 $t=\frac{x-2}{x+3}$,

即
$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x+3)^3}\\&=\frac{1}{5^4}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{5^4}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+3-t\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}-3\ln|t|+3t-\frac{t^2}{2}\right)+C\\&=\frac{1}{625}\left(-\frac{x+3}{x-2}-3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+\frac{3(x-2)}{(x+3)}-\frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2}\right)+C.\end{aligned}$$

【1923】 若 $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式,计算 $\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\mathrm{d}x$.

提示:利用泰勒公式.

解 因为 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式,故得

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

其中 $$P_n^{(0)}(a)=P_n(a),0!=1,$$

所以 $$\int\frac{P_n(x)\mathrm{d}x}{(x-a)^{n+1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{n-k+1}}+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{(n-k)k!}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-k}}$$

$$+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\ln|x-a|+C.$$

【1924】 设$R(x)=R^*(x^2)$,其中R^*为有理函数.则把函数$R(x)$分解为有理分式具有哪些特点?

解 设$R^*(x)=P(x)+H(x)$,其中$P(x)$为多项式,$H(x)$为真分式(当$R^*(x)$为多项式时,$H(x)\equiv 0$).下面考虑$H(x)$在复数域上的分解.记$H(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$,$P_1(x)$,$Q_1(x)$为多项式.设$Q_1(x)$在复数域中的根为$\alpha_i$,其相应重数记为$n_i(i=1,2,\cdots,m$;显然$m\geqslant 1)$.即

$$Q_1(x)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{n_i},$$

由于$Q_1(x)$为实多项式,若α_i不为实数,则存在一个$\alpha_k(k\neq i,1\leqslant k\leqslant m)$使得$\alpha_k=\bar{\alpha}_i$且$n_i=n_k$,那么$Q_1(x^2)$中的每一项$x^2-\alpha_i$可分解为

$$x^2-\alpha_i=(x-b_i)(x+b_i),$$

于是 $$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-b_i)^{n_i}(x+b_i)^{n_i},$$

从而 $$H(x^2)=\frac{P(x^2)}{Q_1(x^2)}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ik}}{(x-b_i)^k}+\frac{A'_{ik}}{(x+b_i)^k}\right].$$

又 $$H((-x)^2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{(-1)^kA_{ik}}{(x+b_i)^k}+\frac{(-1)^kA'_{ik}}{(x-b_i)^k}\right],$$

由于 $H(x^2)=H((-x)^2)$,由分解式的唯一性可得

$$A'_{ik}=(-1)A_{ik}.$$

因此 $H(x^2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}A'_{ik}\left[\frac{1}{(b_i-x)^k}+\frac{1}{(b_i+x)^k}\right].$

故 $R(x)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}A'_{ik}\left[\frac{1}{(b_i-x)^k}+\frac{1}{(b_i+x)^k}\right].$

【1925】 计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$式中,$n$为正整数.

解 记多项式$x^{2n}+1$的根为$\alpha_k(k=1,2,\cdots,2n)$,显然

$$\alpha_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+i\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$$

其中$i=\sqrt{-1}$为虚数单位.并且α_k及$\bar{\alpha}_k=\alpha_{2n-k+1}$均为$x^{2n}+1$的根,而

$$|\alpha_k|=1,\alpha_k^{2n}=-1,\alpha_k\bar{\alpha}_k=1,$$

$$\alpha_k+\bar{\alpha}_k=2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

设 $$\frac{1}{1+x^{2n}}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k}{x-\alpha_k},$$

即 $$1=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-\alpha_k}.$$

令$x\to\alpha_l$应用洛必达法则求极限,可得

$$1=\lim_{x\to\alpha_l}\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-\alpha_k}=\lim_{x\to\alpha_l}\frac{A_l(1+x^{2n})}{x-\alpha_l}$$

$$=2nA_l\alpha_l^{2n-1}=-\frac{2nA_l}{\alpha_l}\qquad(l=1,2,\cdots,2n),$$

所以 $$A_k=-\frac{\alpha_k}{2n}\qquad(k=1,2,\cdots,2n).$$

于是 $$\frac{1}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k}$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k}+\frac{\bar{\alpha}_k}{x-\bar{\alpha}_k}\right)$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha_k+\bar{\alpha}_k)x-2\alpha_k\bar{\alpha}_k}{x^2-(\alpha_k+\bar{\alpha}_k)x+\alpha_k\bar{\alpha}_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

因此 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}x}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\arctan\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]+C.$$

§3. 无理函数的积分法

把被积函数化为有理函数,以求解下列积分(1926 ~ 1936).

【1926】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

解 设$\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2[t-\ln(1+t)]+C$$

$$=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C.$$

【1927】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

解 设$\sqrt[6]{x}=t$,则$x=t^6$,$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$.所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+2t^3+t^2)}$$

$$=6\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)(2t^2-t+1)}$$

$$=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)}\right]\mathrm{d}t$$

$$=6\left[\ln t-\frac{1}{4}\ln(1+t)-\frac{3}{8}\int\frac{4t-1}{2t^2-t+1}\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{16}\int\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\right]$$

$$=6\left[\ln t-\frac{1}{4}\ln(1+t)-\frac{3}{8}\ln(2t^2-t+1)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right]+C.$$

【1928】 $\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\mathrm{d}x$.

解 设$\sqrt[3]{2+x}=t$,则$x=t^3-2$,$\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$.所以

$$\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\mathrm{d}x=3\int\frac{(t^3-2)t^3}{t^3+t-2}\mathrm{d}t$$

$$=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3\int\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3\int\left[-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{\frac{5}{4}t-\frac{1}{2}}{t^2+t+2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\int\frac{d(t^2+t+2)}{t^2+t+2}$$

$$-\frac{27}{8}\int\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)$$

$$-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C$$

$$=\frac{3}{4}(2+x)^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{2}(2+x)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{2+x}-1\right|$$

$$+\frac{15}{8}\ln((2+x)^{\frac{2}{3}}+(2+x)^{\frac{1}{3}}+2)$$

$$-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2\sqrt[3]{2+x}+1}{\sqrt{7}}+C.$$

【1929】 $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x.$

解 设 $\sqrt[6]{x+1}=t$，则 $x=t^6-1$，$\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$. 所以

$$\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x=6\int\frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=6\int\left[-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)$$

$$-6\arctan t+C$$

$$=-\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+6(x+1)^{\frac{1}{6}}+3\ln[1+(x+1)^{\frac{1}{3}}]$$

$$-6\arctan\sqrt[6]{x+1}+C.$$

【1930】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}.$

解 设 $\sqrt[4]{x}=t$，

则 $x=t^4, \mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$. 所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}=4\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)^3}$$

$$=4\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}-4\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^3}$$

$$=-\frac{4}{1+t}+2\frac{1}{(1+t)^2}+C$$

$$=-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}+C.$$

【1931】 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x.$

解 法一：设 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=t$，则

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-1}, \mathrm{d}x=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t.\ 所以$$

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{t-1}{t+1}\cdot\left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t=-4\int\frac{t}{(t-1)(t+1)^3}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left[-\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t+1)}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{(t+1)^3}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+C.$$

法二：

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}\mathrm{d}x$$

$$=\int(x+\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

【1932】 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$,则

$$x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, x-1 = \frac{2}{t^3-1},$$

$$dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt,$$

所以
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}dx$$

$$= \int \frac{(t^3-1)^2}{4t^2}\left[-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\right]dt = -\int \frac{3}{2}dt$$

$$= -\frac{3}{2}t + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

【1933】 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

解 设 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} = t$,

则
$$x = \frac{a}{t^4+1}, dx = -\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}dt, \text{所以}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} = -4a\int \frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$= -4a\int\left[\frac{t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}\right]^2 dt$$

$$= -\frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)^2 dt$$

$$= -\frac{a}{2}\int \frac{dt}{(t^2-\sqrt{2}t+1)^2} - \frac{a}{2}\int \frac{dt}{(t^2+\sqrt{2}t+1)^2}$$

$$+a\int\frac{dt}{t^4+1}.$$

利用 1921 题的递推公式可得

$$\int\frac{dt}{(t^2-\sqrt{2}t+1)^2}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-\sqrt{2}t+1)}+\int\frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-\sqrt{2}t+1)}+\int\frac{d\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-\sqrt{2}t+1)}+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t-1)+C.$$

$$\int\frac{dt}{(t^2+\sqrt{2}t+1)^2}$$

$$=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+\sqrt{2}t+1)}+\int\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

$$=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+\sqrt{2}t+1)}+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t+1)+C.$$

利用 1884 题的结果，有

$$\int\frac{dt}{t^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan(\sqrt{2}t+1)+\arctan(\sqrt{2}t-1)\right],$$

因此 $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$$

$$=-\frac{a}{2}\left[\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-\sqrt{2}t+1)}+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t-1)\right.$$

$$\left.+\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+\sqrt{2}t+1)}+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t+1)\right]$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}t+1)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}t-1)\Big]+C$$

$$=-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$+\frac{a}{4\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t+1)+\frac{a}{4\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t-1)+C.$$

其中 $\quad t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}.$

【1934】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n— 自然数).

解 当 $a=b$ 时,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2}$$

$$=-\frac{1}{x-a}+C.$$

当 $a\neq b$ 时,设 $\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}=t$,

则 $\quad x=a+\frac{a-b}{t^n-1},\mathrm{d}x=-\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}\mathrm{d}t,$

$$x-a=\frac{a-b}{t^n-1},$$

所以 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=\int\frac{\frac{1}{(x-a)^2}}{\left(\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}\right)^{n-1}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{n}{a-b}\int\mathrm{d}t=\frac{n}{b-a}t+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

【1935】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$

提示:假设 $x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2$.

解 设$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=t$,

则 $$\frac{t^2-1}{2t}=\sqrt{x},$$

即 $$x=\frac{(t^2-1)^2}{4t^2},\mathrm{d}x=\frac{t^4-1}{2t^3}\mathrm{d}t.$$

所以
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}&=\frac{1}{2}\int\frac{t^4-1}{t^3(t+1)}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)(t-1)}{t^3}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C_1\\&=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+\frac{x}{2}\\&\quad-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C.\end{aligned}$$

【1936】 证明:若 $p+q=kn$,其中 k 为整数,则积分

$$\int R[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}]\mathrm{d}x.$$

(其中 R 为有理函数且 p,q,n 为整数)是初等函数.

证 当 $a=b$ 时,

$$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^k.$$

则被积函数为 x 的有理函数.所以积分为初等函数.

当 $a\neq b$ 时,设

$$\frac{x-a}{x-b}=y,x=b-\frac{b-a}{1-y}=\frac{a-by}{(1-y)},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{a-b}{(1-y)^2}\mathrm{d}y,$$

$$x-a=\frac{(a-b)y}{1-y},x-b=\frac{a-b}{1-y}.$$

所以
$$\int R(x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}})\mathrm{d}x$$
$$=(a-b)\int R\left[\frac{a-by}{1-y},y^{\frac{p}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^{p}\right]\frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}$$

再设$\sqrt[n]{y}=t$,则 $y=t^n$,$\mathrm{d}y=nt^{n-1}\mathrm{d}t$,故
$$\int R(x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}})\mathrm{d}x$$
$$=n(a-b)\int R\left[\frac{a-bt^n}{1-t^n},t^{p}\left(\frac{a-b}{1-t^n}\right)^{p}\right]\frac{t^{n-1}}{(1-t^n)^2}\mathrm{d}t.$$

因为被积函数为 t 的有理函数,从而积分为 t 的初等函数,因此也为 x 的初等函数.

求解最简单二次无理式的积分(1937 ~ 1942).

【1937】 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x.$

解
$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}$$
$$=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int(1+x+x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2+x+1)$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$
$$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)$$

$$-\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C$$

$$=\frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C.$$

【1938】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解　设 $t=\frac{1}{1+x}$,则

$$x=\frac{1}{t}-1,\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,\text{且}$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\operatorname{sgn}t\cdot\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t},$$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}=-\operatorname{sgn}t\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-\operatorname{sgn}t\int\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\operatorname{sgn}t\cdot\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_1$$

$$=-\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\ln\left|\frac{1-x+2\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)}\right|+C_1.$$

当 $x+1>0$ 时,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

当 $x+1<0$ 时,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\ln\left|\frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2(1+x)}\right|+C_1$$

$$= \ln\left|\frac{-3(x+1)}{2(1-x+2\sqrt{x^2+x+1})}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C.$$

总之，
$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C.$$

【1939】 $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

解 设$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$，则

$$x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt, 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2}, \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

所以
$$\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{t^4}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{2t} + C$$

$$= \frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2} + C.$$

【1940】 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$.

解 设$\sqrt{x^2+2x+2} = t - x$，则

$$x = \frac{t^2-2}{2(t+1)}, dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt, \text{且}$$

$$\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)},$$

所以
$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2t+2)^2}{(t^2-2)(t+1)^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[1+\frac{2}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t}{2}+\ln|t+1|+\frac{1}{2(t+1)}-\sqrt{2}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|+C_1$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$$

$$-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C.$$

【1941】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

解　设 $t=\frac{1}{1+x}$,则

$$x=\frac{1-t}{t},\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,\text{且}$$

$$\sqrt{1-x-x^2}=\operatorname{sgn}t\cdot\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{t},$$

所以

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x-x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}+\operatorname{sgn}t\cdot\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t-1}}$$

$$=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+$$

$$\operatorname{sgn}(1+x)\ln\left|\frac{3+x+2\operatorname{sgn}(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1$$

$$=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C^*.$$

(*)与 1938 题类似地讨论.

【1942】 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= -\int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{5}{8}\arcsin\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$+2\arcsin\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C$$

$$= \frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}+\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

利用公式: $\int \frac{P_n(x)}{y}\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)y+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{y}$,

其中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$,$P_n(x)$ 为 n 次多项式,$Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式,而 λ 为常数.

求解下列积分(1943 ~ 1950).

【1943】 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 设 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

两边对 x 求导数得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$= (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+\frac{(1-x)(Ax^2+Bx+C)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

从而有　$x^3=(2Ax+B)(1+2x-x^2)$

$$+(1-x)(Ax^2+Bx+C)+\lambda$$

比较两边的系数并解方程得

$$A=-\frac{1}{3},B=-\frac{5}{6},C=-\frac{19}{6},\lambda=4.$$

因此　$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

【1944】 $\int\frac{x^{10}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解　设$\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=(Ax^9+Bx^8+Cx^7+Dx^6+Ex^5+Fx^4+Gx^3$$

$$+Hx^2+Ix+K)(\sqrt{1+x^2})+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}},$$

两边求导数得

$$\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=(9Ax^8+8Bx^7+7Cx^6+6Dx^5+5Ex^4+4Fx^3+3Gx^2$$

$$+2Hx+I)\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(Ax^9+Bx^8+Cx^7+$$

$$Dx^6+Ex^5+Fx^4+Gx^3+Hx^2+Ix+K)+\frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}.$$

从而有　$x^{10}=(9Ax^8+8Bx^7+7Cx^6+6Dx^5+5Ex^4$

$$+4Fx^3+3Gx^2+2Hx+I)(1+x^2)$$

$$-x(Ax^9+Bx^8+Cx^7+Dx^6+Ex^5$$

$$+Fx^4+Gx^3+Hx^2+Ix+K)+\lambda.$$

比较系数并解方程得

$$A=\frac{1}{10},B=0,C=-\frac{9}{80},D=0,E=\frac{21}{160},F=0,$$

$$G=-\frac{21}{128},H=0,I=\frac{63}{256},K=0,\lambda=-\frac{63}{256}.$$

所以 $\displaystyle\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\left(\frac{1}{10}x^9-\frac{9}{80}x^7+\frac{21}{160}x^5-\frac{21}{128}x^3+\frac{63}{256}x\right)\sqrt{1+x^2}$$

$$-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

【1945】 $\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx.$

解 设$\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

从而有 $x^4(a^2-x^2)$

$$=(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2)$$

$$-x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+\lambda.$$

比较系数并解方程得

$$A=\frac{1}{6},B=0,C=-\frac{a^2}{24},D=0,E=-\frac{a^4}{16},$$

$$F=0,\lambda=\frac{a^6}{16}.$$

所以 $\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx$

$$=\left(\frac{1}{6}x^5-\frac{a^2}{24}x^3-\frac{a^2}{16}x\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C.$$

【1946】 $\displaystyle\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

解　设$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$

$$=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4x+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}},$$

求导数，通分并比较两边的分子可得

$$x^3-6x^2+11x-6$$
$$=(2Ax+B)(x^2+4x+3)+(Ax^2+Bx+C)(x+2)+\lambda.$$

比较上式两边的系数，可得

$$\begin{cases}3A=1,\\ 10A+2B=-6,\\ 6A+6B+C=11,\\ 3B+2C+\lambda=-6,\end{cases}$$

解之得　$A=\frac{1}{3},B=-\frac{14}{3},C=37,\lambda=-66.$

所以　$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$

$$=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}$$
$$-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.$$

【1947】　$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$

解　设$t=\frac{1}{t}$,

则　　$dx=-\frac{1}{t^2}dt.$

我们这里只讨论$t>0$的情形，对$t<0$的情形类似地讨论可得相同的结论.

所以，　$\int\frac{dx}{x^{3t}\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$$=-\int \sqrt{1+t^2}\,dt+\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=-\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}-\frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{1+t^2}|+\ln|t+\sqrt{1+t^2}|+C$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C.$$

【1948】 $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}>0$,则

$$dx=-\frac{1}{t^2}dt,\ \sqrt{x^2-1}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t},\text{所以}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int \frac{t(1-t^2)-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\int t\sqrt{1-t^2}\,dt-\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{\frac{1}{2}}d(1-t^2)+\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-t^2)$$

$$=-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{1+2x^2}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C.$$

【1949】 $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

解 设 $x-1=\frac{1}{t}$,

则 $$dx=-\frac{1}{t^2}dt.$$

只考虑 $t>0$ 的情形,则有

$$\sqrt{x^2+3x+1}=\frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}.$$

所以 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}\mathrm{d}t.$$

设 $$-\int\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}\mathrm{d}t$$

$$=(At+B)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{5t^2+5t+1}},$$

从而有 $$-t^2=A(5t^2+5t+1)+\frac{1}{2}(At+B)(10t+5)+\lambda.$$

比较两边的系数得

$$10A=-1,$$

$$\frac{3}{2}A+B=0,$$

$$A+\frac{5}{2}B+\lambda=0,$$

解之得 $$A=-\frac{1}{10},B=\frac{3}{20},\lambda=-\frac{11}{40}.$$

因此 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$$

$$=\left(-\frac{t}{10}+\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

$$=\frac{3-2t}{20}\sqrt{5t^2+5t+1}$$

$$-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C_1$$

$$=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}$$

$$-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C.$$

【1950】 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$$

解 设 $x+1=\dfrac{1}{t}$,则

$$dx=-\frac{1}{t^2}dt.$$

只考虑 $t>0$ 的情形($t<0$ 的情形可类似地讨论),则

$$\sqrt{x^2+2x}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t},$$

所以 $$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=-\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

设 $$-\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
$$=(At^3+Bt^2+Ct+D)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

从而有 $$-t^4=(3At^2+2Bt+C)(1-t^2)$$
$$-t(At^3+Bt^2+Ct+D)+\lambda.$$

比较两边的系数,并解方程得

$$A=\frac{1}{4},B=0,C=\frac{3}{8},D=0,\lambda=-\frac{3}{8}.$$

所以 $$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$$
$$=\left(\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\left|\frac{1}{x+1}\right|+C.$$

【1951】 在什么条件下积分 $\displaystyle\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 是代数函数?

解 当 $a=0$ 时,积分显然为代数函数,不妨设 $a\neq 0$,设

$$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$
$$=(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

从而有 $a_1x^2+b_1x+c_1$

$$=A(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}(Ax+B)(2ax+b)+\lambda.$$

比较两边的系数,并解方程得

$$A=\frac{a_1}{2a},B=\frac{4ab_1-3a_1b}{4a^2},$$

$$\lambda=\frac{8a^2c_1+3a_1b^2-4a(a_1c+bb_1)}{8a^2}.$$

于是当 $\lambda=0$,即 $8a^2c_1+3a_1b^2=4a(a_1c+bb_1)$ 时,积分为代数函数.

要求解 $\int\frac{P(x)}{Q(x)y}dx$,其中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$,应先分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式(1952 ~ 1960).

【1952】 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

解 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

设 $x-1=\frac{1}{t}>0$,

则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

而 $\sqrt{1+2x-x^2}=\frac{\sqrt{2t^2-1}}{t}$,

所以 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2-1}}-\int\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}\right|-\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-1}+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|+\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}+C.$$

【1953】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$$

对于$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$,设

$$x+1=\frac{1}{t}(>0),$$

则 $$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^2-x-1}=\frac{\sqrt{t^2-3t+1}}{t}.$$

所以 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-3t+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}$$

$$=-\ln\left|t-\frac{3}{2}+\sqrt{t^2-3t+1}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}\right|+C_2.$$

对于$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$,设

$$x-1=\frac{1}{t},\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,$$

则
$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$
$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t-t^2}}=-\int\frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)}}$$
$$=-\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{5}}=\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{5}\,|x-1|}+C_3.$$

因此
$$\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$$
$$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{5}\,|x-1|}+C.$$

【1954】 $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx.$

解 法一：$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$
$$=\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\int\frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$+\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

而
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$
$$=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C_1.$$

由 1938 题的结果知

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C_2.$$

对于$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}$,设 $x+1=\frac{1}{t}$,则

$$dx=-\frac{1}{t^2}dt.\text{不妨设 } t>0,\text{则} \sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

所以 $$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=-\int \frac{t}{\sqrt{t^2-t+1}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-\sqrt{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_3$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x-1}}{x+1}\right|+C_4.$$

因此 $$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$$

$$=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

法二:$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx=-\int \sqrt{x^2+x+1}\,d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

【1955】 $\displaystyle\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{(x^3+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=\int\frac{x^2-2x-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{x-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$+3\int\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int\sqrt{2-(x-1)^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$+3\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\frac{x-1}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

对于$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$令$1+x=\dfrac{1}{t}$，则

$$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,\text{且}$$

$$\sqrt{1+2x-x^2}=\frac{\sqrt{-2t^2+4t-1}}{t}\qquad(t>0),$$

所以
$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$$
$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{-2t^2+4t-1}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d[\sqrt{2}(t-1)]}{\sqrt{1-[\sqrt{2}(t-1)]^2}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}(t-1))+C$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{|1+x|}+C.$$

因此
$$\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$
$$=-\frac{x+1}{2}\sqrt{1+2x-x^2}$$
$$+2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{|1+x|}+C.$$

【1956】 $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

解
$$\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=\int\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=2\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}-\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

对于$\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$,设 $x-2=\dfrac{1}{t}$,

则 $$dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

则 $$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right)+C_1.$$

设 $x-1=\frac{1}{t}$,

则 $$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t}}=\sqrt{1-2t}=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+C_2.$$

因此 $$\int\frac{dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=-2\arcsin\frac{1}{|x-2|}-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+C.$$

【1957】 $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $x=\sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,

则 $$dx=\cos t\,dt,\ \sqrt{1-x^2}=\cos t,$$
$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}$$
$$=\int\frac{dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}\tan t)}{1+(\sqrt{2}\tan t)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

【1958】 $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

解 被积函数定义域为 $|x|>1$. 当 $x>1$ 时,设

$$x=\sec t \quad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则 $\quad dx = \sec t \cdot \tan t dt, \sqrt{x^2-1} = \tan t,$

所以
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t dt}{1+\sec^2 t}$$
$$= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t + 1} = \int \frac{d(\sin t)}{2-\sin^2 t}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin t}{\sqrt{2}-\sin t}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2-1}}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2-1}}\right| + C.$$

当 $x<-1$ 时,仍设 $x=\sec t$,并限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$,可得到同样的结果,因此
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2-1}}\right| + C.$$

【1959】 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$

解 设 $x=\tan t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 且 $t\neq\pm\frac{\pi}{4}$,则
$$dx = \sec^2 t dt, \sqrt{1+x^2} = \sec t,$$

所以
$$\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec t}{1-\tan^4 t} dt$$
$$= \int \frac{\cos^3 t dt}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t}{1-2\sin^2 t} d(\sin t)$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-2\sin^2 t}{1-2\sin^2 t} d(\sin t) + \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x)}{1-2\sin^2 t}$$
$$= \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right| + C$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right| + C.$$

【1960】 $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx.$

解 $$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)}dx = \int \frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}.$$

设 $x = \sqrt{2}\tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{4}\right)$,则

$$dx = \sqrt{2}\sec^2 t dt, \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2}\sec t,$$

所以 $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{\sec t}{1+2\tan^2 t}dt$$

$$= \int \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt = \arctan(\sin t) + C$$

$$= \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right) + C_1.$$

因此 $$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dt$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + \arctan\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} + C.$$

把二次三项式简化成范式,计算下列积分(1961 ~ 1963).

【1961】 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$

解 $$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$= \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}.$$

当 $x+\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时,设 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t \quad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t\cdot\tan t dt,$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\tan t,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(5\sec^2 t+3),$$

所以

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\\&=4\int\frac{\sec t dt}{5\sec^2 t+3}=4\int\frac{\cos t dt}{5+3\cos^2 t}\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}\sin t)}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{3}\sin t)^2}\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\sin t}\right|+C\\&=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(2x+1)+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{\sqrt{2}(2x+1)-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.\end{aligned}$$

当 $x+\frac{1}{2}<-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时,仍设

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t,$$

并限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$,可得同样的结果. 因此

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(2x+1)+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{\sqrt{2}(2x+1)-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.\end{aligned}$$

【1962】 $\int\frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

解 $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

$$=\int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}}\mathrm{d}x$$

设 $x-1=\sqrt{3}\sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\mathrm{d}x=\sqrt{3}\cos t\mathrm{d}t$，$\sqrt{3-(x-1)^2}=\sqrt{3}\cos t$.

所以 $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

$$=\int \frac{3\sin^2 t+2\sqrt{3}\sin t+1}{3(1+\sin^2 t)}\mathrm{d}t$$

$$=\int \mathrm{d}t+\frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t-\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}$$

$$=t-\frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{2-\cos^2 t}-\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}(\tan t)}{1+2\tan^2 t}$$

$$=t-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|-\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right|$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}}+C.$$

【1963】 $\int \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 $\int \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\int \frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

而
$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}+C_1,$$

由 1781 题结果知

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\cdot\sqrt{x^2+x+1}}+C_2$$

$$=\frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C_2,$$

因此
$$\int\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$$

$$=\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

【1964】 利用线性分式代换 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$,计算积分:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 设 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$,则

$$x^2\pm x+1$$

$$=\frac{(\beta^2\pm\beta+1)t^2+[2\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)+2]t+(\alpha^2\pm\alpha+1)}{(1+t)^2}.$$

当 $2\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)+2=0$ 时，即可化成规范式，所以取 $\alpha=-1$，$\beta=1$，即设 $x=\frac{t-1}{t+1}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$，且

$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{1+3t^2}}{t+1}\qquad(t+1>0),$$

于是
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=2\int\frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}\mathrm{d}t$$
$$=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}+2\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}.$$

对于积分 $\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}$，设 $z=\sqrt{1+3t^2}$，则

$$\mathrm{d}z=\frac{3t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t^2}},t^2+3=\frac{z^2+8}{3},$$

所以
$$\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^3+3)\sqrt{1+3t^2}}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+8}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{z}{2\sqrt{2}}+C_1$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}+C_1$$

对于积分 $\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}$，设 $z=\frac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}$，则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{\mathrm{d}z}{3-z^2},t^2+3=\frac{27-8z^2}{3(3-z^2)},$$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=3\int\frac{\mathrm{d}z}{27-8z^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}z}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}z}\right| + C_2$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt{2}(x+1)}\right| + C_2.$$

因此 $$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt{2}(x+1)}\right| + C.$$

【1965】 求解 $\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$.

解 应用与1964题同样的方法.

设 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$,选择适当的 α 与 β,使两个二次三项式中的一次项同时消去.为此,将 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 代入 x^2+2 及 $2x^2-2x+5$ 中,令一次项的系数为零,得 $\alpha=-1,\beta=2$.

即设 $x=\frac{2t-1}{t+1}$,则

$$dx=\frac{3}{(t+1)^2}dt, x^2+2=\frac{3(2t^2+1)}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{2x^2-2x+5}=\frac{3\sqrt{t^2+1}}{|t+1|},$$

不妨设 $t+1>0$,所以

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}.$$

对于$\frac{1}{3}\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$，设$z=\sqrt{t^2+1}$，则

$$\mathrm{d}z=\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}},2t^2+1=2z^2-1,$$

故
$$\frac{1}{3}\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}z}{2z^2-1}$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}z-1}{\sqrt{2}z+1}+C_1$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}+C_1.$$

对于$\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$，设$z=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$，则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\mathrm{d}z}{1-z^2},2t^2+1=\frac{1+z^2}{1-z^2},$$

故
$$\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$$
$$=\frac{1}{3}\arctan z+C_2$$
$$=\frac{1}{3}\arctan\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}+C_2,$$

因此
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}+\frac{1}{3}\arctan\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}+C.$$

利用欧拉代换，

(1) 若$a>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$；

(2) 若$c>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$；

(3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$.

求解下列积分(1966 ~ 1970).

【1966】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 设$\sqrt{x^2+x+1}=z-x$,

则 $$x=\frac{z^2-1}{2z+1},\mathrm{d}x=\frac{2(z^2+z+1)}{(2z+1)^2}\mathrm{d}z,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}+x=z.$$

所以
$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{z^2+z+1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{z}-\frac{3}{z+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{\left|z+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+\frac{1}{2}}+C_1\\
&=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+\frac{3}{2}\frac{1}{(2z+1)}+C\\
&=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})^4}{|2(x+\sqrt{x^2+x+1})+1|^3}\\
&\quad+\frac{3}{4(x+\sqrt{x^2+x+1})+2}+C.
\end{aligned}$$

【1967】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 设$\sqrt{1-2x-x^2}=xz-1$,则

$$z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x},x=\frac{2(z-1)}{z^2+1},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z,$$

$$1+\sqrt{1-2x-x^2}=z\cdot x=\frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

所以 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

$$=\int\frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$$=\int\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\arctan z+C$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|$$

$$-2\arctan\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C.$$

【1968】 $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x.$

解 设 $\sqrt{x^2-2x+2}=z-x$,

则 $\displaystyle x=\frac{z^2-2}{2(z-1)},\mathrm{d}x=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)^2}\mathrm{d}z.$

$$x\sqrt{x^2-2x+2}=x(z-x)$$

$$=\frac{z^2-2}{2(z-1)}\left(z-\frac{z^2-2}{2(z-1)}\right)$$

$$=\frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)}{4(z-1)^2}.$$

所以 $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)^2}{(z-1)^4}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{[(z-1)^2+2(z-1)-1][(z-1)^2+1]^2}{(z-1)^4}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{8}\int\{[(z-1)^2-(z-1)^{-4}]+2[(z-1)+(z-1)^{-3}]$$

$$+[1-(z-1)^{-2}]+4(z-1)^{-1}\}d(z-1)$$

$$=\frac{1}{24}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]+\frac{1}{8}[(z-1)^2-(z-1)^{-2}]$$

$$+\frac{1}{8}[(z-1)+(z-1)^{-1}]+\frac{1}{2}\ln|z-1|+C.$$

其中 $\quad z=x+\sqrt{x^2-2x+2}.$

【1969】 $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$

解 设 $\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$，

则 $\quad x=\frac{2-z^2}{z^2-1},dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz,$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{z}{z^2-1}.$$

所以 $\quad\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

$$=\int\frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}dz$$

$$=\int\Big[-\frac{17}{108(z+1)}+\frac{5}{18(z+1)^2}+\frac{1}{3(z+1)^3}$$

$$+\frac{3}{4(z-1)}-\frac{16}{27(z-2)}\Big]dz$$

$$=-\frac{17}{108}\ln|z+1|-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}$$

$$+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|+C.$$

其中 $\quad z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}.$

【1970】 $\int\frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}.$

解 设 $\sqrt{x(1+x)}=z+x$，则

$$x=\frac{z^2}{1-2z},dx=\frac{2z(1-z)}{(1-2z)^2}dz,$$

$$1+\sqrt{x(1+x)}=\frac{1-z-z^2}{1-2z}.$$

所以 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$$

$$=2\int\frac{z(1-z)}{(1-z-z^2)^2}\mathrm{d}z$$

$$=2\int\frac{1-z-z^2+(2z+1)-2}{(1-z-z^2)^2}\mathrm{d}z$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}z}{1-z-z^2}-2\int\frac{\mathrm{d}(1-z-z^2)}{(1-z-z^2)^2}-4\int\frac{\mathrm{d}z}{(1-z-z^2)^2}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)}+\frac{2}{1-z-z^2}$$

$$-4\left\{\frac{2z+1}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right\}$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-z-\frac{1}{2}}\right|+\frac{2}{1-z-z^2}-\frac{4(2z+1)}{5(1-z-z^2)}.$$

其中 $$z=\sqrt{x(1+x)}-x.$$

注:倒数第二步利用了 1921 题的递推公式.

运用不同的方法求解下列积分(1971 ~ 1979).

【1971】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\int\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)-(x^2-1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}x+\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

【1972】 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=z$，则

$$x=\frac{z^2-1}{z^2+1},\mathrm{d}x=\frac{4z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.$$

所以
$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\int\frac{x}{(1-x^2)(1+x+x^2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{(z^2-1)(z^2+1)}{3z^4+1}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{3}\int\mathrm{d}z-\frac{4}{3}\int\frac{1}{3z^4+1}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{3}z-\frac{4}{3\sqrt[3]{4}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt[4]{3}z)}{(\sqrt[4]{3}z)^4+1}.$$

由 1884 题结果有

$$\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt[4]{3}z)}{(\sqrt[3]{3}z)^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}z^2+\sqrt[4]{12}z+1}{\sqrt{3}z^2-\sqrt[4]{12}z+1}\right|$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt[4]{12}z}{1-\sqrt{3}z}\right)+C.$$

因此
$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\frac{1+x}{1-x}+\sqrt[4]{12}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1}{\sqrt{3}\frac{1+x}{1-x}-\sqrt[4]{12}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1}\right|$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt[4]{12}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1-\sqrt{3}\frac{1+x}{1-x}}\right)+C.$$

【1973】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$

$$=\int\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{2})}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x+C.$$

【1974】 $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{(x+\sqrt{1+x+x^2})(1+x-\sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2-(1+x+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\mathrm{d}x-\ln|x|.$$

对于积分$\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\mathrm{d}x$，设 $x=\frac{1}{t}$ 先讨论 $x>0$ 的情形，则

$$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,\sqrt{1+x+x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t},$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1+t+t^2}}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int \sqrt{1+t+t^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)}{t\sqrt{1+t+t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} - \int \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t+t^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} - \ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{1+t+t^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}\right)+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} - \ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{1+t+t^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}\right)+1}\right)+C_1$$

$$= \sqrt{1+x+x^2} - \ln\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{2}+C_1$$

$$= \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$$

$$+\ln|x|+C.$$

因此 $$\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C.$$

当 $x<0$ 时类似地讨论可得到同样的结果.

【1975】 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(x+1)-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int[(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}]\mathrm{d}x$$

$$=\int[x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

【1976】 $\int \frac{(x^2-1)\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

解 $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}}}\mathrm{d}x=\int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}+C.$$

注:其中$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)$可由

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{\tan^2 t-1}{\sec^4 t}\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2t+C_1=-\frac{x}{1+x^2}+C_1$$ 提到.

【1977】 $\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

解 $$\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}}}$$

$$= \int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}+\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}\right)^2}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right| + C.$$

【1978】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

解 先讨论 $x>0$，设$\frac{1}{x}=\sqrt{t}$，

则 $$\mathrm{d}x = -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^4+2x^2-1} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}.$$

所以 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1-t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x^2} + C.$$

当 $x<0$ 时，设 $\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$，类似地讨论可得相同的结果.

【1979】 $\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

解 $$\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+1}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^4}}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{2+x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}+C.$$

【1980】 证明积分：

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+\mathrm{d}})\mathrm{d}x$$

（其中 R 为有理函数）的求解，可归结为有理函数的积分.

证 当 $a=c=0$ 时，积分显然为有理函数的积分.

当 $a\neq 0,c=0$，令 $\sqrt{ax+t}=t$，则

$$x=\frac{1}{a}(t^2-b),\mathrm{d}x=\frac{2}{a}t\mathrm{d}t,$$

则 $$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})=\int R\left(\frac{1}{a}t^2-b,t\right)\frac{2}{a}t\mathrm{d}t$$

为有理函数的积分.

当 $a=0,c\neq 0$ 时，有同样的结论.

当 $a\neq 0,c\neq 0$ 时，设 $\sqrt{ax+b}=t$，

则 $$x=\frac{t^2-b}{a},\mathrm{d}x=\frac{2}{a}t\,\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{cx+\mathrm{d}}=\sqrt{\frac{c}{a}t^2+\mathrm{d}-\frac{bc}{a}}=\sqrt{c_1t^2+\mathrm{d}_1}.$$

其中 $c_1=\frac{c}{a},\mathrm{d}_1=\mathrm{d}-\frac{bc}{a}$. 所以

$$\begin{aligned}&\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+\mathrm{d}})\mathrm{d}x\\&=\int R\left(\frac{t^2-b}{a},t,\sqrt{at^2+\mathrm{d}}\right)\frac{2t}{a}\mathrm{d}t\\&=\int R_1(t,\sqrt{c_1t^2+\mathrm{d}_1})\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中 R_1 为有理函数,再设

$$\sqrt{c_1t^2+\mathrm{d}_1}=\pm\sqrt{c_1}t+z\qquad(z_1>0),$$

或 $$\sqrt{c_1t^2+\mathrm{d}_1}=tz\pm\sqrt{\mathrm{d}_1}\qquad(\mathrm{d}_1>0),$$

即尤拉变换,就可将被积函数化为有理函数.

二项微分式的积分:$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$

(其中 m、n 和 p 为有理数)只能在以下三种情况下可化为有理函数的积分(切贝绍夫定理):

第一种情况:

令 p 为整数,假定 $x=z^N$,其中 N 为分数 m 和 n 的公分母;

第二种情况:

令 $\frac{m+1}{n}$ 为整数,假定 $a+bx^n=z^N$,其中 N 为分数 p 的分母;

第三种情况:

令 $\frac{m+1}{n}+p$ 为整数,运用代换 $ax^{-n}+b=z^N$,其中 N 为分数 p 的分母.

若 $n=1$,则这些情况等同于如下:

(1) p 为整数;(2) m 为整数;(3) $m+p$ 为整数.

求解下列积分(1981 ~ 1989).

【1981】 $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

解 $\sqrt{x^3+x^4}=x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$,

则 $m=\frac{3}{2}, n=1, p=\frac{1}{2}$,

则 $\frac{m+1}{n}+p=3$.

这是二项微分式的第三种情况,设

$$x^{-1}+1=z^2,$$

则 $x=\frac{1}{z^2-1}, dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz$,

$$\sqrt{x^3+x^4}=\frac{z}{(z^2-1)^2} \quad (\text{不妨设 } z>0).$$

代入并利用 1921 题的结果有,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx&=-2\int\frac{z^2}{(z^2-1)^4}dz\\&=-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^4}-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}\\&=-2\left[-\frac{z}{6(z^2-1)^3}-\frac{5}{6}\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}\right]-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}\\&=\frac{z}{3(z^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}\\&=\frac{z}{3(z^2-1)^3}+\frac{z}{12(z^2-1)^2}-\frac{z}{8(z^2-1)}+\frac{1}{16}\ln\frac{z+1}{z-1}+C\\&=\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}\\&\quad+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C.\end{aligned}$$

【1982】 $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$.

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$,

这里 $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}, p=-2$；$p$ 为整数，这是二项微分式的第二种情形.

设 $x=z^6$，

则 $\quad dx=6z^5dz$，

$\sqrt{x}=z^3, \sqrt[3]{x}=z^2$.

代入并利用 1921 题的结果有

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=6\int \frac{z^8}{(1+z^2)^2}dz$$

$$=6\int\left[z^4-2z^2+3-\frac{4}{z^2+1}+\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]dz$$

$$=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-24\arctan z$$

$$+6\left[\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan z\right]+C$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+3\frac{x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\arctan(x^{\frac{1}{6}})+C.$$

【1983】 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

解 $\quad \dfrac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$，

这里 $m=1, n=\frac{2}{3}, p=-\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n}=3$，这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$，

则 $\quad x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}$，

$dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz$.

所以 $\quad \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int (z^2-1)^2dz$

$$=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C$$

$$=\frac{3}{5}(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}})^5-2(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}})^3+3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}+C.$$

【1984】 $\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

这里 $m=5,n=2,p=-\frac{1}{2},\frac{m+1}{n}=3$,这是二项微分式的第二种情形.

设 $\sqrt{1-x^2}=z$(不妨设 $x>0$). 则

$$x=\sqrt{1-z^2},\mathrm{d}x=-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z$$

所以 $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int(1-z^2)^2\mathrm{d}z$

$$=-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5+C$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}(\sqrt{1-x^2})^3-\frac{1}{5}(\sqrt{1-x^2})^5+C.$$

【1985】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}=x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}$,这里 $m=0,n=3,p=-\frac{1}{3}$,

$\frac{m+1}{3}+p=0$,这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-3}+1=z^3$,

则 $x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}},\mathrm{d}x=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}z.$

代入得 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int\frac{z}{z^3-1}\mathrm{d}z$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}z}{z-1}+\frac{1}{3}\int\frac{z-1}{z^2+z+1}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C.$$

其中 $z=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

【1986】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

解 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}$,

$m=0,n=4,p=-\dfrac{1}{4},\dfrac{m+1}{n}+p=0$,这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-4}+1=z^4$,即 $z=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{|x|}$.则

$$x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}},dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz.$$

所以
$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2}{z^4-1}dz$$

$$=\int\left[\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\arctan z+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+|x|}{\sqrt[4]{1+x^4}-|x|}\right)-\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{|x|}+C.$$

【1987】 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

解 $\dfrac{1}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=x^{-1}(1+x^6)^{-\frac{1}{6}}$.

$m=-1,n=6,p=-\dfrac{1}{6},\dfrac{m+1}{n}=0$,是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^6=z^6$,则

$$z=\sqrt[6]{1+x^6},x=\sqrt[6]{z^6-1}(\text{不妨设 } z>0,x>0),$$

$$dx=z^5(z^6-1)^{-\frac{5}{6}}dz.$$

所以
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}}=\int\frac{z^4}{z^6-1}dz$$

$$=\int\left[-\frac{1}{6(z+1)}+\frac{z+1}{6(z^2-z+1)}+\frac{1}{6(z-1)}+\frac{-z+1}{6(z^2+z+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt[6]{1+x^6}+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{\sqrt[3]{1+x^6}-\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt[3]{1+x^6}+\sqrt[6]{1+x^6}+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

【1988】 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

解 $$\frac{1}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}.$$

$m=-3,n=-1,p=-\frac{1}{5},\frac{m+1}{n}=2$,这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{-1}=z^5$,则

$$x=\frac{1}{z^5-1},dx=-5z^4(z^5-1)^{-2}dz.$$

所以
$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=-5\int z^3(z^5-1)dz$$

$$=-\frac{5}{9}z^9+\frac{5}{4}z^4+C$$

$$=-\frac{5}{9}\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}\right)^9+\frac{5}{4}\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}\right)^4+C.$$

【1989】 $\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x.$

解 $\sqrt[3]{3x-x^3}=x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}$,

$m=\frac{1}{3},n=2,p=\frac{1}{3},\frac{m+1}{n}+p=1$,这是二项微分式的第三种情形.

设 $3x^{-2}-1=z^3$(不妨设 $x>0$). 则

$$z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x},x=\sqrt{\frac{3}{z^3+1}},$$

$$\mathrm{d}x=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z^2}{(z^3+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z,$$

代入并利用 1892 题及 1881 题的结果有

$$\int\sqrt[3]{3x-x^3}=-\frac{9}{2}\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{9}{2}\int\frac{1}{(z^3+1)}\mathrm{d}z+\frac{9}{2}\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^3+1)^2}$$

$$=-\frac{9}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$+\frac{9}{2}\left[\frac{z}{3(z^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right]+C$$

$$=\frac{3z}{z(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C.$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

【1990】 在什么情况下积分 $\int\sqrt{1+x^m}\,\mathrm{d}x$(其中 m 为有理数)

是初等函数?

解 $\sqrt{1+x^m}=x^0(1+x^m)^{\frac{1}{2}}$

由于 $p=\frac{1}{2}$. 故由切贝协夫定理知仅在下述两种情形下,此积分可化为有理函数的积分.

(1) $\frac{1}{m}$ 为整数,即 $m=\frac{1}{k_1}=\frac{2}{2k_1}(k_1=\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(2) $\frac{1}{m}+\frac{1}{2}$ 为整数,即$\frac{1}{m}+\frac{1}{2}=k_2$,

$$m=\frac{2}{2k_2-1}\qquad(k_2=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

因此,当 $m=\frac{2}{k}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时,积分$\int\sqrt{1+x^m}\mathrm{d}x$ 为初等函数.

§4. 三角函数的积分法

形如$\int\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$(其中 m 与 n 为整数)的积分,可通过巧妙的变换或采用递推公式进行计算.

求解下列积分(1991 ~ 2010).

【1991】 $\int\cos^5 x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\cos^5 x\mathrm{d}x&=\int\cos^4 x\cos x\mathrm{d}x\\&=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\mathrm{d}(\sin x)\\&=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.\end{aligned}$$

【1992】 $\int\sin^6 x\mathrm{d}x$.

解 $\int\sin^6 x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$$

$$- \frac{1}{16}\int (1 - \sin^2 2x)\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin 4x$$

$$- \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

$$= \frac{5x}{16} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

【1993】 $\int \cos^6 x\mathrm{d}x.$

解 利用 1992 题的结果有

$$\int \cos^6 x\mathrm{d}x = \int \sin^6\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{16}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{3}{64}\sin 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{48}\sin^3 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C_1$$

$$= \frac{5x}{16} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

【1994】 $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x.$

解 $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos^2 x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1 + \cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)\mathrm{d}x + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

【1995】 $\int \sin^4 x\cos^5 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^4 x\cos^5 x\mathrm{d}x = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

【1996】 $\int \sin^5 x\cos^5 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^5 x\cos^5 x\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\int \sin^5 2x\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{64}\int (1-\cos^2 2x)^2\mathrm{d}(\cos 2x)$$

$$= -\frac{1}{64}\cos 2x + \frac{1}{96}\cos^3 2x - \frac{1}{320}\cos^5 2x + C.$$

【1997】 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}(\cos x)$

$$= -\int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

【1998】 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}(\sin x)$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\cos^2 x\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{2}\cos x+C.$$

【1999】 $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\int\frac{1}{\sin x}d(\cot x)$$
$$=-\frac{\cot x}{\sin x}-\int\cot x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$
$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx$$
$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\sin^3 x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|,$$

故 $$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【2000】 $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{1}{\cos x}d(\tan x)$$
$$=\frac{\tan x}{\cos x}-\int\tan x\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$
$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}dx$$
$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^3 x}+\ln\left|\tan\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|,$$

故 $$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

【2001】 $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=16\int\frac{dx}{\sin^4 2x}$$
$$=-8\int\csc^2 2x\,d(\cot 2x)=-8\int(1+\cot^2 2x)d(\cot 2x)$$

$$=-8\cot 2x-\frac{8}{3}\cot^3 2x+C.$$

【2002】 $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^5 x}dx$

$$=\int \frac{dx}{\sin x\cos^5 x}+\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$$

$$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^5 x}dx+\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^3 x}dx$$

$$=\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx+2\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}+\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$$

$$=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x}+2\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx+3\int \frac{dx}{\sin x\cos x}+\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

$$=\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}+3\int \frac{d(\tan x)}{\tan x}$$

$$=\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}+3\ln|\tan x|+C.$$

【2003】 $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}dx$

$$=\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}dx$$

$$=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}+\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\int \frac{1}{\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【2004】 $\int \tan^5 x dx$.

解 $\int \tan^5 x dx=\int \tan x(\sec^2 x-1)^2 dx$

$$=\int \sec^4 x\tan x dx-2\int \sec^2 x\tan x dx+\int \tan x dx$$

$$=\int \sec^3 x\mathrm{d}(\sec x)-2\int \sec x\mathrm{d}(\sec x)-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$$

$$=\frac{1}{4}\sec^4 x-\sec^2 x-\ln|\cos x|+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C.$$

【2005】 $\int \tan^6 x\mathrm{d}x.$

解 $\int \tan^6 x\mathrm{d}x=\int \tan^4 x(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\int \tan^4 x\csc^2 x\mathrm{d}x-\int \tan^2 x(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\int \tan^4 x\mathrm{d}(\tan x)+\int \tan^2 x\mathrm{d}(\tan x)+\int (\csc^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x-x+C.$$

【2006】 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\mathrm{d}x=\int \tan^4 x\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{5}\tan^5 x+C.$

【2007】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$

$$=\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}\mathrm{d}x+\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int \sqrt{\tan x}\mathrm{d}(\tan x)+\int \frac{1}{\sqrt{\cot x}}\mathrm{d}(\cot x)$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x}-2\sqrt{\cot x}+C.$$

【2008】 $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

解 设 $t = \sqrt[3]{\sin x}$，不妨只考虑 $\cos x$ 为正的情况. 即 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$，则有

$$dx = \frac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}}, \cos x = \sqrt{1-t^6},$$

代入并利用 1881 题的结果得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} &= 3\int \frac{dt}{1-t^6} \\
&= \frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1-t^3}+\frac{1}{1+t^3}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)dt+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t^3} \\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{4}\int\frac{d(1+t+t^2)}{1+t+t^2} \\
&\quad +\frac{3}{4}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&\quad +\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]+C \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2(1+t+t^2)}{(1-t)^2(t^2-t+1)} \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]+C \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)} \\
&\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]+C.
\end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\sin x}$.

【2009】 $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$.

解 设 $t=\sqrt{\tan x}$,

则 $x=\arctan t^2$,

$$dx=\frac{2t}{1+t^4}dt,$$

代入并利用 1884 题的结果有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}=2\int \frac{dt}{1+t^4}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\frac{2t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+C.$$

其中 $t=\sqrt{\tan x}$.

【2010】 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x}}$.

解 设 $\sqrt[3]{\tan x}=t$,

则 $x=\arctan t^3$,

$$dx=\frac{3t^2}{1+t^6}dt,$$

代入并利用 1881 题的结果有

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x}}$$

$$=3\int\frac{t\,dt}{1+t^6}=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2)}{1+(t^2)^3}$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+C.$$

其中 $t=\sqrt[3]{\tan x}$.

【2011】 推导积分的递推公式：

(1) $I_n=\int\sin^n x\mathrm{d}x$； (2) $K_n=\int\cos^n x\mathrm{d}x \quad (n>2)$.

并利用这些公式计算$\int\sin^6 x\mathrm{d}x$ 及$\int\cos^8 x\mathrm{d}x$.

解 (1) $I_n=\int\sin^n x\mathrm{d}x=-\int\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}+(1-n)I_n,$$

所以 $$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

利用此公式得

$$I_6=\int\sin^6 x\mathrm{d}x=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}I_4$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}+\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}I_2$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5}{16}\int\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5}{16}x+C.$$

(2) $K_n=\int\cos^n x\mathrm{d}x=\int\cos^{n-1}x\mathrm{d}(\sin x)$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)K_{n-2}-(n-1)K_n,$$

所以 $$K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}.$$

利用此公式并注意到

$$K_0=\int\mathrm{d}x=x+C,$$

即得 $$K_8=\int\cos^8 x\mathrm{d}x=\frac{\sin x\cos^7 x}{8}+\frac{7}{8}K_6$$

$$=\frac{\sin x\cos^7 x}{8}+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}K_4$$

$$=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}I_2$$

$$=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x+C.$$

【2012】 推导积分的递推公式：

(1) $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$；　　(2) $K_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$　$(n>2)$

并利用这些公式计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x}$及$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}$.

解 (1) $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x$

$$=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^{n-1}x}\right)$$

$$=I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}$$

$$=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

又 $\qquad I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C,$

所以 $\qquad I_5=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{3}{4}I_3$

$$=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(2) $K_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^n x}\mathrm{d}x$

$$=K_{n-2}+\frac{1}{n-1}\int\sin x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos^{n-1}x}\right)$$

$$=K_{n-2}+\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}K_{n-2}$$

$$=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2},$$

又 $\quad K_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C,$

所以 $\quad K_7=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5}{6}K_5$

$$=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}K_3$$

$$=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}$$

$$+\frac{5}{16}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

利用下列公式：

(1) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$；

(2) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$；

(3) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

来求解下列积分(2013 ～ 2018).

【2013】 $\int\sin 5x\cos x\mathrm{d}x$.

解 $\int\sin 5x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\sin 4x+\sin 6x]\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x+C.$$

【2014】 $\int\cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x$.

解 $\int\cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\cos 2x[\cos 2x+\cos 4x]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int(1+\cos4x)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int(\cos6x+\cos2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\sin4x + \frac{1}{24}\sin6x + \frac{1}{8}\sin2x + C.$$

【2015】 $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\int\sin\frac{x}{6}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int\sin\frac{5x}{6}\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{1}{4}\int\sin\frac{7x}{6}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int\sin\frac{11x}{6}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6} + C.$$

【2016】 $\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)\mathrm{d}x.$

解 $$\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\sin x[\cos(a-b) - \cos(2x+a+b)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cos(a-b)\int\sin x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\sin x\cos(2x+a+b)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b) + \frac{1}{4}\int\sin(x+a+b)\mathrm{d}x$$

$$- \frac{1}{4}\int\sin(3x+a+b)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b) - \frac{1}{4}\cos(x+a+b)$$

$$+ \frac{1}{12}\cos(3x+a+b) + C.$$

【2017】 $\int \cos^2 ax \cos^2 bx \mathrm{d}x$.

解 $\int \cos^2 ax \cos^2 bx \mathrm{d}x = \int (\cos ax \cos bx)^2 \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]^2 \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int [\cos^2(a-b)x + 2\cos(a-b)x \cdot \cos(a+b)x$

$+ \cos^2(a+b)x]\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{8}\int [2 + \cos 2(a-b)x + \cos 2(a+b)x]\mathrm{d}x$

$+ \frac{1}{4}\int (\cos 2bx + \cos 2ax)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}x + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + \frac{\sin 2bx}{8b}$

$+ \frac{\sin 2ax}{8a} + C$.

【2018】 $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x \mathrm{d}x$.

解 因为 $\sin^3 2x \cos^2 3x$

$= \sin 2x(\sin 2x \cos 3x)^2$

$= \frac{1}{4}\sin 2x(\sin 5x - \sin x)^2$

$= \frac{1}{4}\sin 2x\left[1 - \frac{1}{2}\cos 10x - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 5x \sin x\right]$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 2x \cos 10x - \frac{1}{8}\sin 2x \cos 2x$

$- \frac{1}{4}\sin 2x(\cos 4x - \cos 6x)$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}(\sin 12x - \sin 8x) - \frac{1}{16}\sin 4x$

$- \frac{1}{8}(\sin 6x - \sin 2x) + \frac{1}{8}(\sin 8x - \sin 4x)$

$$=\frac{3}{8}\sin 2x-\frac{3}{16}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 6x+\frac{3}{16}\sin 8x-\frac{1}{16}\sin 12x,$$

所以 $\int \sin^3 2x\cos^2 3x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x$$

$$-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x+C.$$

运用恒等式：

$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)\equiv\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]}$$

及 $\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)\equiv\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)]}$.

求解下列积分(2019 ~ 2024).

【2019】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C,$$

其中 $\sin(a-b)\neq 0$.

若 $\sin(a-b)=0$,

即 $a-b=k\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,

则 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=(-1)^k\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x+a)}$$

$$=(-1)^{k+1}\cot(x+a)+C.$$

【2020】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

解 设 $\cos(a-b)\neq 0$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int \frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int \left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} + \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right| + C.$$

若 $\cos(a-b)=0$ 与前题类似地讨论.

【2021】 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

解 设 $\sin(a-b)\neq 0$,

则 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \left[\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)} - \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right| + C.$$

若 $\sin(a-b)=0$,即 $a-b=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

则 $$\int \frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)} = (-1)^k\tan(x+a)+C.$$

【2022】 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x-\sin a}$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x-\sin a} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos a}\int \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\cos a}\int \frac{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}+\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\left[\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C.\qquad(\cos a\neq 0)$$

【2023】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x+\cos a}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x+\cos a}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sin a}\int\frac{\sin\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\sin a}\int\left[\frac{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\cos\frac{x+a}{2}}-\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x-a}{2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C.\qquad(\sin a\neq 0)$$

【2024】 $\displaystyle\int\tan x\tan(x+a)\mathrm{d}x$.

解 $$\int\tan x\tan(x+a)\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\cos x\cos(x+a)+\sin x\sin(x+a)-\cos x\cos(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\cos a-\cos x\cos(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}\mathrm{d}x$$

$$=-x+\cos a\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x\cos(x+a)}$$

$$=-x+\cot a\cdot\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|+C.\qquad(\sin a\neq 0)$$

形如$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$的积分($R$为有理函数),在一般情况下,可用代换$\tan\frac{x}{2}=t$将其化为有理函数的积分.

(1) 若等式

$$R(-\sin x,\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$$

或

$$R(\sin x,-\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$$

成立,则最好运用代换$\cos x=t$或相应的$\sin x=t$.

(2) 若等式

$$R(-\sin x,-\cos x)\equiv R(\sin x,\cos x)$$

成立,则最好运用代换$\tan x=t$.

求解下列积分(2025 ~ 2040).

【2025】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.

解　设$t=\tan\frac{x}{2}$,

则
$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)+C$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{atctan}\left[\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right]+C.$$

【2026】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$,

则 $$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

所以 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{1+t^2}{t(3+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left[\frac{1}{3t}+\frac{2t}{3(3+t^2)}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\ln\mid t(3+t^2)\mid+C_1$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\left(2+\sec^2\frac{x}{2}\right)\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right)\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}(\cos x+2)\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(1-\cos x)(\cos x+2)^2}{(1+\cos x)^3}\right|+C.$$

【2027】 $\displaystyle\int\frac{\sin^2x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x.$

解 设 $\tan\frac{x}{2}=t$,则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

所以 $$\int\frac{\sin^2x}{\sin x+2\cos x}=4\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{5}\int\left[\frac{1}{1+t^2}+\frac{-2+t}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{1+t-t^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}+\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{(1+t^2)^2}$$

$$+\frac{4}{5}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

而由 1817 题的结果有

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{2}\arctan t+\frac{t}{2(1+t^2)}+C_1.$$

因此 $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$

$$=\frac{4}{5}\arctan t-\frac{8}{5}\left[\frac{1}{2}\arctan t+\frac{t}{2(1+t^2)}\right]-\frac{2}{5}\frac{1}{1+t^2}$$

$$+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|+C_2$$

$$=-\frac{2}{5}\frac{1+2t}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|+C_2$$

$$=-\frac{2}{5}\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}}{\tan\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)-\tan\frac{x}{2}}\right|+C_2$$

$$=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\arctan 2}{2}\right)\right|+C.$$

【2028】 $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$.

(1) $0<\varepsilon<1$;(2) $\varepsilon>1$.

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$

则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$

所以 $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}=I.$

(1) 当 $0<\varepsilon<1$ 时，

$$I=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

(2) 当 $\varepsilon>1$ 时，

$$I=\frac{2}{\varepsilon-1}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)-t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}+t}{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}-t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+1+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+(\varepsilon-1)t^2}{(\varepsilon+1)-(\varepsilon-1)t^2}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1-t^2)+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon(1-t^2)+(1+t^2)}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\sqrt{\varepsilon^2-1}}{1+\varepsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|+C.$$

【2029】 $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$$= x - \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\sec^2 x + \tan^2 x} = x - \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1 + 2\tan^2 x}$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C.$$

【2030】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}}{a^2\tan^2 x + b^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{b^2}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1 + \left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2}$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right) + C. \qquad (ab \neq 0)$$

【2031】 $\int \frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

解 利用 1921 题的结果可得

$$\int \frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(a\tan x)}{(a^2\tan^2 x + b^2)^2}$$

$$= \frac{\tan x}{2b^2(a^2\tan^2 x + b^2)} + \frac{1}{2ab^3}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right) + C.$$

【2032】 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{-\frac{1}{2}\cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

【2033】 $\displaystyle\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$.

解 $$\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\int\frac{dx}{(a\tan x+b)^2\cdot\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{d(a\tan x+b)}{(a\tan x+b)^2}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a\tan x+b}+C$$

$$=-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C.$$

【2034】 $\displaystyle\int\frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

解 $$\int\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\int\frac{\tan x}{1+\tan^3 x}d(\tan x)$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{\tan x+1}{1-\tan x+\tan^2 x}-\frac{1}{1+\tan x}\right)d(\tan x)$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(1-\tan x+\tan^2 x)}{1-\tan x+\tan^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\tan x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\tan x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{d(\tan x)}{1+\tan x}$$

$$=\frac{1}{6}\ln(1-\tan x+\tan^2 x)-\frac{1}{3}\ln|1+\tan x|$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【2035】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

$$=\int\frac{dx}{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2}$$

$$=\int\frac{2\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x}=\int\frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{2\sec^2 2x-\tan^2 2x}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{2+\tan^2 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

【2036】 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\mathrm{d}x=\int\frac{2\sin^2 2x\mathrm{d}x}{\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8}$$

$$=\int\frac{\tan^2 2x\mathrm{d}(\tan 2x)}{\tan^4 2x-8\tan^2 2x\sec^2 2x+8\sec^4 2x}$$

$$=\int\frac{\tan^2 2x\mathrm{d}(\tan 2x)}{\tan^4 2x+8\tan^2 2x+8}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2})\int\frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{\tan^2 2x+4+2\sqrt{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{2})\int\frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{\tan^2 2x+4-2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right.$$

$$\left.-\sqrt{2-\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right]+C.$$

【2037】 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}+C.$$

【2038】 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx = \int \frac{\tan x\sec^2 x dx}{\sec^4 x + \tan^4 x}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(\tan^2 x)}{2\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(1+2\tan^2 x) + C.$$

【2039】 $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \int \frac{dx}{(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3}$

$$= \int \frac{dx}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)}$$

$$= \int \frac{dx}{1 - 3\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{dx}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{2d(\tan 2x)}{4\sec^2 2x - 3\tan^2 2x} = \int \frac{2d(\tan 2x)}{4 + \tan^4 2x}$$

$$= \arctan\left(\frac{\tan 2x}{2}\right) + C.$$

【2040】 $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} = \int \frac{\sec^4 x dx}{(\tan^2 x + 2)^2}$

$$= \int \frac{\tan^2 x + 1}{(\tan^2 x + 2)^2} d(\tan x)$$

$$= \int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2} - \int \frac{1}{(\tan^2 x + 2)^2} d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} - \frac{\tan x}{4(\tan^2 x + 2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} - \frac{\tan x}{4(\tan^2 x + 2)} + C.$$

【2041】 求解积分$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$先把分母化为对数形状.

解 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},a^2+b^2\neq 0.$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\varphi)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x+\varphi}{2}\right)\right|+C.$$

【2042】 证明
$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

其中 A、B、C 为常数.

提示：设
$$a_1\sin x+b_1\cos x$$
$$=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x),$$

其中 A、B 为常数.

证 $a_1\sin x+b_1\cos x$
$$=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x),$$

其中 $A=\dfrac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},B=\dfrac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},a^2+b^2\neq 0.$

所以
$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=A\int\mathrm{d}x+B\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

求解下列积分(2043 ~ 2045).

【2043】 $\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{-\frac{1}{5}(\sin x+2\cos x)-\frac{3}{5}(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{5}\int \mathrm{d}x-\frac{3}{5}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}$$

$$=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$$

【2043.1】 $\int \frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\frac{1}{10}(\sin x-3\cos x)+\frac{3}{10}(\cos x+3\sin x)}{\sin x-3\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{1}{10}\mathrm{d}x+\frac{3}{10}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x-3\cos x)}{\sin x-3\cos x}$$

$$=\frac{1}{10}x+\frac{3}{10}\ln|\sin x-3\cos x|+C.$$

【2044】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\tan x}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\tan x}=\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{5\sin x+3\cos x}$

$$=\int \frac{\frac{3}{34}(5\sin x+3\cos x)+\frac{5}{34}(5\cos x-3\sin x)}{5\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{34}x+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|+C.$$

【2045】 $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x.$

解 因为

$$a_1\sin x+b_1\cos x$$
$$=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x),$$

其中 $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}, B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$,所以

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a_1 \sin x + b\cos x)^2} dx$$
$$= A\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} + B\int \frac{d(a\sin x + b\cos x)}{(a\sin x + b\cos x)^2}$$
$$= \frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\varphi)} - \frac{B}{a\sin x + b\cos x}$$
$$= \frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right| - \frac{B}{a\sin x + b\cos x} + C.$$

其中　$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$

$$A = \frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}, B = \frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}.$$

【2046】 证明

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c} dx$$
$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

其中　A、B、C 为常系数.

证　设 $a_1\sin x + b_1\cos x + c_1$
$$= A(a\sin x + b\cos x + c) + B(a\cos x - b\sin x) + C,$$

比较两边的系数得

$$aA - bB = a_1,$$
$$bA + aB = b_1,$$
$$cA + C = c_1,$$

解之得　$A = \frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}, B = \frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},$

$$C = \frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}.$$

所以　$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos + c_1}{a\sin x + b\cos x + c} dx$

$$= A\int dx + B\int \frac{d(a\sin x + b\cos x + c)}{a\sin x + b\cos x + c}$$

$$+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$

$$+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

求解下列积分(2047 ~ 2049).

【2047】 $\displaystyle\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\mathrm{d}x.$

解 利用 2046 题求解,这里

$$a_1=1,b_1=2,c_1=-3,a=1,b=-2,c=3,$$

从而 $$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=-\frac{3}{5},$$

$$B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}=\frac{4}{5},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}=-\frac{6}{5}.$$

因此 $$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|$$

$$-\frac{6}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x-2\cos x+3}.$$

设 $t=\tan\dfrac{x}{2}$,可求得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x-2\cos x+3}=\arctan\frac{1+5\tan\dfrac{x}{2}}{2}+C,$$

故 $$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|$$

$$-\frac{6}{5}\arctan\frac{1+5\tan\dfrac{x}{2}}{2}+C.$$

【2048】 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}dx$.

解 利用 2046 题求解,这里

$$a_1=1, b_1=0, c_1=0,$$
$$a=1, b=1, c=\sqrt{2},$$
$$A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

所以
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}dx$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}.$$

而
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}=\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C,$$

因此
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}dx$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$
$$-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

【2049】 $\int \frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$.

解 利用 2046 题求解,这里

$$a_1=2, b_1=1, c_1=0,$$
$$a=3, b=4, c=-2,$$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{6+4}{9+16}=\frac{2}{5},$$

$$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=-\frac{1}{5},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}=\frac{4}{5},$$

所以
$$\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$$
$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|$$
$$+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x-2}.$$

令 $t=\tan\frac{x}{2}$,可求得

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x-2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\tan\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\tan\frac{x}{2}-1\right)}\right|+C.$$

因此
$$\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$$
$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|$$
$$+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\tan\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\tan\frac{x}{2}-1\right)}\right|+C.$$

【2050】 证明

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}dx$$
$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x},$$

其中 A、B、C 为常系数.

证 设 $a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x$

$$=A\cos x(a\sin x+b\cos x)$$

$$-B\sin x(a\sin x+b\cos x)+C,$$

比较两边的系数得

$$aA-bB=2b_1,$$

$$C-aB=a_1,$$

$$C+bA_1=c_1,$$

解之得 $A=\dfrac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2}$,

$$B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2},$$

$$C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

所以 $\displaystyle\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$

$$=A\int\cos x\mathrm{d}x-B\int\sin x\mathrm{d}x+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}.$$

求解下列积分(2051 ~ 2052).

【2051】 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

解 利用 2050 题求解,这里

$$a_1=1,b_1=-2,c_1=3,a=1,b=1,$$

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2}=\frac{3-1-4}{1+1}=-1,$$

$$B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2}=\frac{3-1+4}{1+1}=3,$$

$$C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}=\frac{1+3+4}{1+1}=4.$$

所以 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=-\sin x+3\cos x+4\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$$

$$=-\sin x+3\cos x+\frac{4}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

【2052】 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x.$

解 利用 2050 题求解，这里

$$a_1=1,b_1=-\frac{1}{2},c_1=2,$$

$$a=1,b=2,$$

$$A=\frac{1}{5},B=\frac{3}{5},C=\frac{8}{5},$$

所以 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x+\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+2\cos x}.$$

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+2\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t-t^2}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{5}-2\tan\frac{x}{2}+1}\right|+C.$$

因此 $$\int \frac{\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x + \frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{5}-2\tan\frac{x}{2}+1}\right| + C.$$

【2053】 证明:若$(a-c)^2+b^2\neq 0$,则

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= A\int \frac{\mathrm{d}u_1}{k_1u_1^2+\lambda_1} + B\int \frac{\mathrm{d}u_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}$$

其中A,B为未定系数,λ_1,λ_2为以下方程式的根.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2),$$

$$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x,$$

且 $$k_i = \frac{1}{a-\lambda_i} \quad (i=1,2).$$

证 设 $a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x$

$$= (a-\lambda_i)\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + (c-\lambda_i)\cos^2 x + \lambda_i$$

$$= \frac{1}{a-\lambda_i}[(a-\lambda_i)^2\sin^2 x + 2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x$$

$$+ (c-\lambda_i)(a-\lambda_i)\cos^2 x] + \lambda_i,$$

其中$\lambda_i(i=1,2)$为

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

的根. 由假设

$$(a-c)^2 + b^2 \neq 0,$$

从而 $(a-c)^2 + 4b^2 \neq 0$. 所以$\lambda_1 \neq \lambda_2$. 再设

$$k_i = \frac{1}{a-\lambda_i} \qquad (i=1,2),$$

及 $$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x.$$

由于 $$b^2 = (a-\lambda_i)(c-\lambda_i),$$

于是
$$
\begin{aligned}
&a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x \\
&= k_i[(a-\lambda_i)^2\sin^2 x + 2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x \\
&\quad + b^2\cos^2 x] + \lambda_i \\
&= k_i[(a-\lambda_i)\sin x + b\cos x]^2 + \lambda_i \\
&= k_i u_i^2 + \lambda_i. \qquad ①
\end{aligned}
$$

其次设
$$
\begin{aligned}
a_1\sin x + b_1\cos x &= A[(a-\lambda_i)\cos x - b\sin x] \\
&\quad + B[(a-\lambda_2)\cos x - b\sin x], \qquad ②
\end{aligned}
$$

比较等式两边的系数,可得

$$-b(A+B) = a_1,$$
$$A(a-\lambda_1) + B(a-\lambda_2) = b_1,$$

所以
$$A = -\frac{a_1(\lambda_1-\lambda_2) + bb_1 + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)},$$
$$B = \frac{bb_1 + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

由 ① 及 ② 有

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= A\int\frac{(a-\lambda_1)\cos x - b\sin x}{k_1[(a-\lambda_1)\sin x + b\cos x] + \lambda_1}\mathrm{d}x \\
&\quad + B\int\frac{(a-\lambda_2)\cos x - b\sin x}{k_2[(a-\lambda_2)\sin x + b\cos x] + \lambda_2}\mathrm{d}x \\
&= A\int\frac{\mathrm{d}u_1}{k_1u_1^2+\lambda_1} + B\int\frac{\mathrm{d}u_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}.
\end{aligned}
$$

注:题中要求 $b \neq 0$,因若 $b = 0$,则 $\lambda_1 = a$,$\lambda_2 = c$,从而 k_1 无意义,但当 $b = 0$ 时,积分仍能化为所要求的形式. 事实上,若 $b = 0$,则 $a \neq c$.

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + c\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -a_1\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{(c-a)\cos^2 x + a} + b_1\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{(a-c)\sin^2 x + c}
\end{aligned}
$$

$$= A\int \frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1} + B\int \frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}.$$

式中　$A = -a_1, B = b_1, k_1 = c - a, k_2 = a - c, \lambda_1 = a, \lambda_2 = c.$

求解下列积分(2054 ～ 2056).

【2054】 $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx.$

解 $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

$$= \int \frac{2\sin x dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x} - \int \frac{\cos x dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}$$

$$= -2\int \frac{d(\cos x)}{3 + \cos^2 x} - \int \frac{d(\sin x)}{4 - \sin^2 x}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x} + C.$$

【2055】 $\int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$

解 应用 2053 题的结果求解，这里

$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1$

$a = 2 \qquad b = -2 \qquad c = 5$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

从而 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$，所以

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + b_1 b + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{3}{5},$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = -\frac{1}{10},$$

$$u_1 = (a-\lambda_1)\sin x + b\cos x = \sin x - 2\cos x,$$

$$u_2 = (a-\lambda_2)\sin x + b\cos x = -4\sin x - 2\cos x,$$

$$k_1 = \frac{1}{a-\lambda_1} = 1, k_2 = \frac{1}{a-\lambda_2} = -\frac{1}{4},$$

所以　$\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}dx$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x - 2\cos x)}{(\sin x - 2\cos x)^2 + 1}$$

$$- \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}(4\sin x + 2\cos x)}{\frac{1}{4}(4\sin x + 2\cos x)^2 - 6}$$

$$= \frac{3}{5}\arctan(\sin x - 2\cos x)$$

$$+ \frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6} + 2\sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2\sin x - \cos x}\right| + C.$$

【2056】 $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}\mathrm{d}x.$

解 应用 2053 题求解

$$\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

这里 $a_1 = 1, b_1 = -2, a = 1, b = 2, c = 1;$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1; k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = \frac{1}{2}; A = \frac{1}{4}, B = -\frac{3}{4};$$

$$u_1 = 2(\cos x - \sin x), u_2 = 2(\cos x + \sin x).$$

所以 $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{d}(\cos x - \sin x)}{-2(\cos x - \sin x)^2 + 3} - \frac{3}{4}\int \frac{2\mathrm{d}(\cos x + \sin x)}{2(\cos x + \sin x) - 1}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1}\right|$$

$$- \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}\right| + C.$$

【2057】 证明 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^n}$

$$=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}}$$

其中 A,B,C 为未定系数.

证 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$,

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

设 $I_n=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}$,

则
$$\begin{aligned}
I_n&=(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n(x+\varphi)}\\
&=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int\frac{1}{\sin^{n-2}(x+\varphi)}\mathrm{d}[\cot(x+\varphi)]\\
&=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{\cot(x+\varphi)}{\sin^{n-2}(x+\varphi)}\\
&\quad-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int\frac{\cot(x+\varphi)\cos(x+\varphi)}{\sin^{n-1}(x+\varphi)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\\
&\quad-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int\frac{1-\sin^2(x+\varphi)}{\sin^n(x+\varphi)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+(2-n)I_n\\
&\quad+\frac{n-2}{(a^2+b^2)}I_{n-2}.
\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}
I_n&=\frac{\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}\sin x-\frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\\
&\quad+\frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}I_{n-2}.
\end{aligned}$$

即
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}$$

$$= \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}}.$$

其中 $A = \dfrac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}$　$B = -\dfrac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}$

$$C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}.$$

【2058】 求积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

解 应用2057题求解,这里

$$a = 1, b = 2, n = 3, A = \frac{2}{10}, B = -\frac{1}{10}, C = \frac{1}{10}.$$

所以
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + 2\cos x)^3}$$
$$= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2\cos x}$$
$$= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\varphi)}$$
$$= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| + C,$$

其中 $\varphi = \arctan 2$.

【2059】 若 n 为大于1的自然数. 证明 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n}$

$$= \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

并确定系数 A、B 和 C,其中 $|a| \neq |b|$.

证 设 $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n}$,

则
$$I_{n-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{(a+b\cos x) - b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b}{a}\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{(n-1)b^2}{a}\int\frac{\sin^2 x}{(a+b\cos x)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n-1}{a}\int\frac{(b^2-a^2)+(a+b\cos x)(a-b\cos x)}{(a+b\cos x)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$+\frac{n-1}{a}\int\frac{a-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$-\frac{n-1}{a}\int\frac{(a+b\cos x)-2a}{(a+b\cos x)^{n-1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$-\frac{n-1}{a}I_{n-2}+2(n-1)I_{n-1},$$

所以 $$\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{a}I_n$$

$$=-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}-\frac{n-2}{a}I_{n-2}.$$

即 $$I_n=\frac{b}{(n-1)(b^2-a^2)}\cdot\frac{\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{a(2n-3)}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-1}+\frac{(n-2)}{(n-1)(b^2-a^2)}I_{n-2}.$$

因此 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n}$$

$$=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+B\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+$$

$$+C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

其中 $$A=\frac{b}{(n-1)(b^2-a^2)},$$

$$B=\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)},$$

$$C=\frac{n-2}{(n-1)(b^2-a^2)}.$$

求解下列积分(2060 ~ 2064).

【2060】 $\displaystyle\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

解 $$\int\frac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{\sec^2 x+\tan^2 x}}=\int\frac{\mathrm{d}(\sec x)}{\sqrt{2\sec^2 x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\sec x+\sqrt{2\sec^2-1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}+C.$$

【2061】 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}\mathrm{d}x$.

解 $$\int\frac{\sin^2 x\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}=\int\frac{\sin^2 x\mathrm{d}(\tan x)}{\sqrt{\tan x}}$$

$$=2\int\sin^2 x\mathrm{d}(\sqrt{\tan x})=2\int(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\sqrt{\tan x})$$

$$=2\sqrt{\tan x}-2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{\tan x}}{1+\tan^2 x}.$$

由 1884 题有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C.$$

所以 $\int\frac{\sin^2 x\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$

$$=2\sqrt{\tan x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right|$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan(\sqrt{2\tan x}+1)+\arctan(\sqrt{2\tan x}-1)\right]+C.$$

【2062】 $\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

解 因为 $2+\sin 2x=1+(\sin x+\cos x)^2$

$$=3-(\sin x-\cos x)^2,$$

所以 $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{3-(\sin x-\cos)^2}}$$

$$-\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right|$$

$$=-\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sin 2x}}+\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$-\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right|.$$

因此 $\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sin 2x}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C.$$

【2063】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2} \quad (0<\varepsilon<1)$.

解 利用 2059 题求解,这里

$$a=1, b=\varepsilon, n=2,$$

$$A=-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, B=\frac{1}{1-\varepsilon^2}, C=0.$$

所以
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$$
$$=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{1}{1-\varepsilon^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}.$$

由 2028 题的结论知

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

因此
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$$
$$=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}$$
$$+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

【2064】 $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x$.

提示:假定 $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$.

解 设 $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$,则

$$\mathrm{d}t=\frac{-\frac{1}{2}\cos a}{\sin^2\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x.$$

所以
$$\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{2}{n\cos a}t^{n}+C=-\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^{n}+C.$$

【2065】 推导积分的递推公式：

$$I_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n}\mathrm{d}x,\quad (n\text{ 为自然数}).$$

解 设 $t=\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}$，

则 $x=2\arctan\left(\dfrac{1+t}{1-t}\cdot\tan\dfrac{a}{2}\right)$，

$$\mathrm{d}x=\frac{4\tan\frac{a}{2}}{t^{2}\sec^{2}\frac{a}{2}+2t\left(\tan^{2}\frac{a}{2}-1\right)+\sec^{2}\frac{a}{2}}\mathrm{d}t,$$

所以
$$I_n=\int\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right]^{n}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{4t^{n}\tan\frac{a}{2}}{t^{2}\sec^{2}\frac{a}{2}+2t\left(\tan^{2}\frac{a}{2}-1\right)+\sec^{2}\frac{a}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{4\tan\frac{a}{2}}{\sec^{2}\frac{a}{2}}t^{n-2}\mathrm{d}t$$

$$+\int \frac{-4\tan\frac{a}{2}\cdot\dfrac{2\left(\tan^2\frac{a}{2}-1\right)}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-1}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\tan^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}\mathrm{d}t$$

$$+\int \frac{-4\tan\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\tan^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}+2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}.$$

§5. 各种超越函数的积分法

【2066】 证明:若 $P(x)$ 为 n 次多项式,则

$$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x$$

$$=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

证 利用分部积分法并注意到

$$P^{(n+1)}(x)\equiv 0,$$

有

$$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}\int P(x)\mathrm{d}(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}P'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a^2}\int P'(x)\mathrm{d}(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a^2}P'(x)e^{ax}+\frac{1}{a^2}\int e^{ax}P'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\cdots$$

$$=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

【2067】 证明:若 $P(x)$ 为 n 次多项式,则

$$\int P(x)\cos ax\,dx$$
$$=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$
$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C,$$

及

$$\int P(x)\sin ax\,dx$$
$$=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$
$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

证 利用分部积分公式,并注意到

$$P^{(n+1)}(x)\equiv 0,$$

$$\int P(x)\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\int P(x)\,d(\sin ax)$$
$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax-\frac{1}{a}\int P'(x)\sin ax\,dx$$
$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)\,d(\cos ax)$$
$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos x-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\cos ax\,dx$$
$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^3}P''(x)\sin ax$$
$$-\frac{1}{a^4}P'''(x)\cos ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\cos ax\,dx$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^4(x)}{a^4}-\cdots\right]$$
$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

$$\int P(x)\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\int P(x)\,d(\cos ax)$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a}\int P'(x)\cos ax\,dx$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)\,d(\sin ax)$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\sin ax\,dx$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax+\frac{1}{a^3}P''(x)\cos ax$$

$$-\frac{1}{a^3}\int P'''(x)\cos ax\,dx$$

$$=\cdots$$

$$=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$

$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

求解下列积分(2068 ~ 2080).

【2068】 $\int x^3e^{3x}dx$.

解 利用 2066 题的结果有

$$\int x^3e^{3x}dx=e^{3x}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{3^2}+\frac{6x}{3^3}-\frac{6}{3^4}\right]+C$$

$$=e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)+C.$$

【2069】 $\int(x^2-2x+2)e^{-x}dx$.

解 利用 2066 题的结果有

$$\int(x^2-2x+2)e^{-x}dx$$

$$=e^{-x}\left(\frac{x^2-2x+2}{-1}-\frac{2x-2}{(-1)^2}+\frac{2}{(-1)^3}\right)+C$$

$$=-e^{-x}(x^2+2)+C.$$

【2070】 $\int x^5\sin 5x\,dx$.

解 利用 2067 题的结果有

$$\int x^5 \sin 5x\mathrm{d}x = -\frac{\cos 5x}{5}\left[x^5 - \frac{20x^3}{5^2} + \frac{120x}{5^4}\right] + \frac{\sin 5x}{5^2}\left(5x^4 - \frac{60x^2}{5^2} + \frac{120}{5^4}\right) + C$$

$$= -\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5 - \frac{4x^3}{5} + \frac{24x}{125}\right) + \frac{\sin 5x}{25}\left(5x^4 - \frac{12x^2}{5} + \frac{24}{125}\right) + C.$$

【2071】 $\int (1+x^2)^2 \cos x\mathrm{d}x.$

解 利用 2067 题结果有

$$\int (1+x^2)^2 \cos x\mathrm{d}x$$

$$= \sin x[(1+2x^2+x^4)-(4+12x^2)+24] + \cos x[(4x+4x^3)-24x] + C$$

$$= (x^4-10x^2+21)\sin x + (4x^3-20x)\cos x + C.$$

【2072】 $\int x^7 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解 设 $t = x^2$,

则有 $$\int x^7 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int t^3 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\left[\frac{t^3}{-1} - \frac{3t^2}{(-1)^2} + \frac{6t}{(-1)^3} - \frac{6}{(-1)^4}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}[x^6+3x^4+6x^2+6] + C.$$

【2073】 $\int x^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 设 $\sqrt{x} = t$,

则 $x = t^2, \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t.$

所以 $$\int x^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int t^5 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$= 2\mathrm{e}^t[t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120] + C$$

$$= 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x^{\frac{5}{2}} - 5x^2 + 20x^{\frac{3}{2}} - 60x + 120x^{\frac{1}{2}} - 120) + C.$$

【2074】 $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$.

解 $$\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}(1+\cos 2bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{2a}e^{ax} + \frac{1}{2}\int e^{ax}\cos 2bx\,dx,$$

而由 1828 题的结果有
$$\int e^{ax}\cos 2bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{a^2+4b^2},$$
因此 $$\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx = \frac{1}{2a}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{ax}\frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{a^2+4b^2} + C.$$

【2075】 $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx$.

解 $$\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx = \int e^{ax}\sin bx\,\frac{1-\cos 2bx}{2}\,dx$$
$$= \int e^{ax}\left(\frac{3}{4}\sin bx - \frac{1}{4}\sin 3bx\right),$$

由于 $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$,

所以 $$\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx = \frac{3}{4}e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}$$
$$-\frac{1}{4}e^{ax}\frac{a\sin 3bx - 3b\cos 3bx}{a^2+9b^2} + C.$$

【2076】 $\int xe^x\sin x\,dx$.

解 $$\int xe^x\sin x\,dx = -\int xe^x\,d(\cos x)$$
$$= -xe^x\cos x + \int (1+x)e^x\cos x\,dx$$
$$= -xe^x\cos x + \int (1+x)e^x\,d\sin x$$
$$= -xe^x\cos x + (1+x)e^x\sin x - \int (2+x)e^x\sin x\,dx$$
$$= e^x(x\sin x + \sin x - x\cos x) - 2\int e^x\sin x\,dx$$

$$-\int xe^x\sin x\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int e^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C_1,$$

因此 $$\int xe^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x(x\sin x-x\cos x+\cos x)+C.$$

【2077】 $\int x^2e^x\cos x\mathrm{d}x.$

解 $$\int x^2e^x\cos x\mathrm{d}x=\int x^2\cos x\mathrm{d}(e^x)$$
$$=x^2e^x\cos x-\int e^x(2x\cos x-x^2\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=x^2e^x\cos x-\int(2x\cos x-x^2\sin x)\mathrm{d}(e^x)$$
$$=x^2e^x\cos x-e^x(2x\cos x-x^2\sin x)$$
$$+\int e^x(2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=e^x[x^2(\cos x+\sin x)-2x\cos x]+2\int e^x\cos x\mathrm{d}x$$
$$-4\int xe^x\sin x\mathrm{d}x-\int x^2e^x\cos x\mathrm{d}x.$$

而 $$\int e^x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C_1.$$

由 2076 题的结果知

$$\int xe^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x[x(\sin x-\cos x)+\cos x]+C_2.$$

故 $$\int x^2e^x\cos x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}e^x[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]$$
$$+\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$$
$$-2\cdot\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]+C$$

$$= \frac{1}{2}e^x[x^2(\sin x + \cos x) - 2x\sin x$$
$$+ (\sin x - \cos x)] + C.$$

【2078】 $\int xe^x \sin^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int xe^x \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int xe^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int xe^x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int xe^x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e^x(x-1) - \frac{1}{2}\int xe^x\cos 2x\mathrm{d}x.$$

而 $\int xe^x\cos 2x\mathrm{d}x = \int x\cos 2x\mathrm{d}(e^x)$

$$= xe^x\cos 2x - \int e^x\cos 2x\mathrm{d}x + 2\int xe^x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$\int xe^x\sin 2x\mathrm{d}x = xe^x\sin 2x - \int e^x\sin 2x\mathrm{d}x - 2\int xe^x\cos 2x\mathrm{d}x$$

又由 1828 题及 1829 题知

$$\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + C_1$$

$$\int e^x\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C_2$$

代入得 $\int xe^x\sin^2 x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}e^x(x-1) - \frac{1}{10}xe^x\cos 2x - \frac{2}{5}xe^x\sin 2x + C.$$

【2079】 $\int (x-\sin x)^3\mathrm{d}x$.

解 $\int (x-\sin x)^3\mathrm{d}x$

$$= \int (x^3 - 3x^2\sin x + 3x\sin^2 x - \sin^3 x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^3 - 3\int x^2\sin x\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$+\int(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\frac{1}{4}x^3+3(x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x)+\frac{3}{4}x^2$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}x+\frac{\cos 2x}{2^2}\right)+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

$$=\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-6x\sin x-5\cos x$$

$$-\frac{3}{4}x\sin 2x-\frac{3}{8}\cos 2x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

【2080】 $\int\cos^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解 设$\sqrt{x}=t$,

则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

所以 $$\int\cos^2\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int 2t\cos^2 t\mathrm{d}t=\int t(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\int\sin 2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C.$$

【2081】 证明:若 R 为有理函数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为可公约的数,则积分$\int R(\mathrm{e}^{a_1x},\mathrm{e}^{a_2x},\cdots,\mathrm{e}^{a_nx})\mathrm{d}x$ 是初等函数.

证 因为$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为可公约的数,所以存在一非零实数α及整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得 $a_1=k_1\alpha,a_2=k_2\alpha,\cdots,a_n=k_n\alpha$. 设 $\mathrm{e}^{\alpha x}=t$,

则 $x=\frac{1}{\alpha}\ln t,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha t}\mathrm{d}t$.

故 $$\int R(\mathrm{e}^{a_1x},\mathrm{e}^{a_2x},\cdots,\mathrm{e}^{a_nx})\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{\alpha}R(t^{k_1},t^{k_2},\cdots,t^{k_n})\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int R_1(t)\mathrm{d}t,$$

其中$R_1(t)$为t的有理函数，从而$\int R_1(t)\,\mathrm{d}t$为t的初等函数. 因此积分$\int R(\mathrm{e}^{a_1x},\mathrm{e}^{a_2x},\cdots,\mathrm{e}^{a_nx})\,\mathrm{d}x$为初等函数.

求解下列积分(2082 ~ 2090).

【2082】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

解 $$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}&=\int\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x\\&=\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\\&=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+C.\end{aligned}$$

【2083】 $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解 $$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}-1+1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\\&=\int(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}x+\int\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^x-x+\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.\end{aligned}$$

【2084】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2}$.

解 $$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+2)(\mathrm{e}^x-1)}\\&=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\int\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-1\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\ln|\mathrm{e}^x-1|-\frac{x}{3}-\frac{x}{6}+\frac{1}{6}\ln(\mathrm{e}^x+2)+C\end{aligned}$$

$$=-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\ln[(e^x-1)^2(e^x+2)]+C.$$

【2085】 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

解 设 $e^{\frac{x}{6}}=t$，则

$x=6\ln t$,

$dx=\dfrac{6}{t}dx$，所以

$$\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(1+t+t^2+t^3)}=6\int\frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)}$$

$$=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{t+1}{t^2+1}\right]dt$$

$$=6\ln t-3\ln(t+1)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(1+e^{\frac{x}{6}})-\frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}})-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

【2086】 $\displaystyle\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx$.

解 设 $e^{\frac{x}{4}}=t$，则

$x=4\ln t, dx=\dfrac{4}{t}dt$,

所以 $$\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx=4\int\frac{1+t^2}{t(1+t)^2}dt$$

$$=4\int\left[\frac{1}{t}-\frac{2}{(1+t)^2}\right]dt=4\ln t+\frac{8}{1+t}+C$$

$$=x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}+C.$$

【2087】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

解 设$\sqrt{e^x-1}=t$,则

$$x=\ln(t^2+1),\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1},\text{所以}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=2\arctan t+C$$

$$=2\arctan(\sqrt{e^x-1})+C$$

【2088】 $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\mathrm{d}x.$

解 设$\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}=t$,则

$$x=\ln\frac{1+t^2}{1-t^2},\mathrm{d}x=\frac{4t}{(1+t^2)(1-t^2)}\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\frac{1+t}{1-t}-2\arctan t+C_1$$

$$=\ln\frac{1+\sqrt{\frac{e^x-1}{ex+1}}}{1-\sqrt{\frac{e^x-1}{ex+1}}}-2\arctan\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}+C_1$$

$$=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})-2\arctan\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}+C.$$

【2089】 $\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\mathrm{d}x.$

解 $\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{e^{2x}+4e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}+4e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}\mathrm{d}x$$

$$+2\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+4e^x-1)}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} + 2\int \frac{d(e^x+2)}{\sqrt{(e^x+2)^2-5}}$$

$$+\int \frac{d(e^{-x}-2)}{\sqrt{5-(e^{-x}-2)^2}}$$

$$= \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} + 2\ln(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1})$$

$$-\arcsin\frac{2e^x-1}{\sqrt{5}e^x}+C.$$

【2090】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})$$

$$+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{4}I_2,$$

其中 $I_1=\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx, I_2=\int\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}dx.$

设 $\sqrt{1+e^x}=t,$

则 $x=\ln(t^2-1), dx=\frac{2tdt}{t^2-1},$

所以 $I_1=\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=2\int\frac{dt}{t^2-1}$

$$=\ln\frac{t-1}{t+1}+C_1=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C_1.$$

设 $\sqrt{1-e^x}=t,$

则 $x=\ln(1-t^2), dx=-\frac{2t}{1-t^2}dt,$

所以 $$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}=-2\int\frac{dt}{1-t^2}=\ln\frac{1-t}{1+t}+C_2$$
$$=\ln\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{1+\sqrt{1-e^x}}+C_2.$$

因此 $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$$
$$=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})$$
$$+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}+C.$$

【2091】 证明:积分
$$\int R(x)e^{ax}dx$$
(其中 R 为有理函数,其分母仅有实根)可用初等函数和超越函数来表示,
$$\int\frac{e^{ax}}{x}dx=\mathrm{li}(e^{ax})+C,$$
其中 $\mathrm{li}x=\int\frac{dx}{\ln x}$.

证 因为 R 的分母仅有实根,所以 $R(x)$ 可分解为如下的部分分式.
$$R(x)=P(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{i_k}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j},$$
其中 $R(x)$ 为多项式,A_{ij} 是常数. 从而有
$$\int R(x)e^{ax}dx=\int P(x)e^{ax}dx+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{i_k}\int\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}e^{ax}dx$$
$\int P(x)e^{ax}dx$ 显然为初等函数. 而$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx$ 可表为初等函数与超越函数 $l_i(e^{ax})$ 的和.

事实上,设 $x-a_i=t$,则

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dt = \int \frac{e^{a(t+a_i)}}{t^j}dt = \frac{e^{aa_i}}{1-j}\int e^{at} d\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right)dt$$

$$= \frac{e^{aa_i}}{1-j}e^{at}\frac{1}{t^{j-1}} - \frac{ae^{aa_i}}{1-j}\int \frac{e^{at}}{t^{j-1}}dt = \cdots$$

$$= e^{at}\left(\frac{D_{j-1}}{t^{j-1}} + \frac{D_{j-2}}{t^{j-2}} + \cdots + \frac{D_2}{t^2}\right) + B_{ij}\int \frac{e^{at}}{t}dt$$

$$= g_{ij}(x) + B_{ij}\int \frac{e^{a(x-a_i)}}{(x-a_i)}dx$$

$$= g_{ij}(x) + B_{ij}li(e^{a(x-a_i)}).$$

其中 $g_{ij}(x)$ 为 x 的初等函数，B_{ij} 为常数. 因此

$$\int R(x)e^{ax}dx = \int P(x)e^{ax}dx + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{i_k}A_{ij}g_{ij}(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{i_k}A_{ij}B_{ij}l_i(e^{a(x-a_i)}).$$

【2092】 在什么情况下，积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$$

(其中 $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$ 及 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为常数) 是初等函数?

解 $$\int \frac{a_k}{x^k}e^x dx = -\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}} + \frac{a_k}{k-1}\int \frac{e^x}{x^{k-1}}dx$$

$$= -\frac{a_k}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}} - \frac{a_k}{(k-1)(k-2)}\frac{e^x}{x^{k-2}}$$

$$+ \frac{a_k}{(k-1)(k-2)}\int \frac{e^x}{x^{k-2}}dx$$

$$= -\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}} - \cdots - \frac{a_k}{(k-1)!}\frac{e^x}{x}$$

$$+ \frac{a_k}{(k-1)!}\int \frac{e^x}{x}dx,$$

所以 $$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$$

$$= \int \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} \right) e^x dx = \sum_{k=0}^{n} \int \frac{a_k}{x^k} e^x dx$$

$$= - \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_k}{(k-1)\cdots(k-j)} \cdot \frac{e^x}{x^{k-j}}$$

$$+ a_0 e^x + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx.$$

因此若 $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} = 0$，即

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0,$$

则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx$ 为初等函数.

求解下列积分(2093 ~ 2097).

【2093】 $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$

解 $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \int \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x dx$

$$= e^x - 4\int \frac{e^x}{x} dx - 4\int e^x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^x - 4\int \frac{e^x}{x} dx - 4\frac{e^x}{x} + 4\int \frac{e^x}{x} dx$$

$$= e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right) + C.$$

【2094】 $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$

解 $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = - e^{-x} - li(e^{-x}) + C.$

【2095】 $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx.$

解 $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{e^{2x}}{(x-2)(x-1)} dx$

$$= \int \frac{e^{2x}}{x-2} dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1} dx$$

$$= e^4\int \frac{e^{2(x-2)}}{x-2}d(x-2) - e^2\int \frac{e^{2(x-1)}}{x-1}d(x-1)$$

$$= e^4 li(e^{2x-4}) - e^2 li(e^{2(x-1)}) + C.$$

【2096】 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$

解 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} = -\int xe^x d\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$$= -xe^x\frac{1}{x+1} + \int \frac{1}{x+1}\cdot e^x(x+1)dx$$

$$= xe^x\frac{1}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C.$$

【2097】 $\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx.$

解 $\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx$

$$= \int (x^2+4x+12)e^{2x}dx + 32\int \frac{e^{2x}}{x-2}dx + 16\int \frac{e^{2x}dx}{(x-2)^2}$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{21}{4}\right) + 32e^4\int \frac{e^{2(x-2)}}{x-2}d(x-2)$$

$$-16\int e^{2x}d\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{21}{4}\right) + 32e^4 li(e^{2x-4}) - \frac{16e^{2x}}{x-2}$$

$$+32\int \frac{e^{2x}}{x-2}dx$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{21}{4}-\frac{16}{x-2}\right) + 64e^4 li(e^{2x-4}) + C.$$

求解含有 $\ln f(x)$，$\arctan f(x)$，$\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$ 等函数的积分，其中 $f(x)$ 为代数函数(2098 ~ 2115).

【2098】 $\int \ln^n x dx$　(n 为自然数).

解 $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1}x dx$

$$= x\ln^n x - nx\ln^{n-1}x + n(n-1)\int \ln^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$= \cdots$$

$$= x[\ln^n x - x\ln^{n-1}x + n(n-1)\ln^{n-2}x - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}n!\ln x + (-1)^n n!] + C.$$

【2099】 $\int x^3\ln^3 x\mathrm{d}x.$

解 $\int x^3\ln^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \ln^3 x\mathrm{d}(x^4)$

$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{4}\int x^3\ln^3 x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}\int \ln^2 x\mathrm{d}(x^4)$$

$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{8}\int x^3\ln^x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{32}x^4\ln x - \frac{3}{32}\int x^3\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^4\left(\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{8}\ln x - \frac{3}{32}\right) + C.$$

【2100】 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$

解 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \ln^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^3}\ln^2 x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x + \frac{3}{4}\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x + \frac{6}{4}\int \frac{1}{x^3}\ln x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4}\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4x^2}\ln x + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3x+\frac{3}{2}\ln^2x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)+C.$$

【2101】 $\int\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

解 $\int\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

$$=\int\frac{\ln(x+a)}{x+b}dx+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$

$$=\int\ln(x+a)d[\ln(x+b)]+\int\ln(x+b)d[\ln(x+a)]$$

$$=\ln(x+a)\cdot\ln(x+b)-\int\ln(x+b)d[\ln(x+a)]$$

$$+\int\ln(x+b)d[\ln(x+a)]$$

$$=\ln(x+a)\cdot\ln(x+b)+C.$$

【2102】 $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

解 $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2})$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int dx$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C.$$

【2103】 $\int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$.

解 $\int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}\int x\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}dx$$

$$= x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}dx$$

$$= x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x+C.$$

【2104】 $\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\ln x\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

【2105】 $\int x\arctan(x+1)dx.$

解 $\int x\arctan(x+1)dx=\frac{1}{2}\int\arctan(x+1)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$$

【2106】 $\int\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}dx.$

解 $\int\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\int\arctan\sqrt{x}dx^{\frac{3}{2}}$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\ln|1+x|+C.$$

【2107】 $\int x\arcsin(1-x)\mathrm{d}x.$

解 $\int x\arcsin(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arcsin(1-x)\mathrm{d}(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\int\sqrt{1-(1-x)^2}\mathrm{d}(1-x)$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}[(1-x)^2-1]}{\sqrt{1-(1-x)^2}}-\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)\sqrt{1-(1-x)^2}$$

$$+\frac{1}{4}\arcsin(1-x)-\sqrt{1-(1-x)^2}$$

$$-\arcsin(1-x)+C$$

$$=\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)-\frac{x+3}{4}\sqrt{2x-x^2}+C.$$

【2108】 $\int\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}x=x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

设 $\sqrt{x}=t$,

则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t.$

所以 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

$$= 2\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= -2\int \sqrt{1-t^2} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -t\sqrt{1-t^2} - \arcsin t + 2\arcsin t + C_1$$

$$= \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + C_1.$$

因此 $\int \arcsin\sqrt{x} = \left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C.$

【2109】 $\int x\arccos\frac{1}{x}dx.$

解 $\int x\arccos\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\int \arccos\frac{1}{x}d(x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sgn}x \cdot x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)\sqrt{x^2-1} + C.$$

【2110】 $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx.$

解 $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx = \int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}d(x+1)$

$$= (x+1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - \operatorname{sgn}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= (x+1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} \cdot \operatorname{sgn}\frac{1-x}{1+x} + C.$$

【2111】 $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \arccos x\, d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x + \int \frac{x}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C.$$

【2112】 $\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\arccos x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$$

【2113】 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$

解 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\arctan x\cdot\ln(1+x^2)\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\cdot\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}\int x^2\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x\arctan x}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\cdot\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int x\arctan x\mathrm{d}x+\int\frac{x\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\cdot\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\arctan x\ln(1+x^2)$$

$$-\int\frac{x\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{x\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}x^2\arctan x$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x \cdot \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$$

$$+ x - \arctan x + \frac{1}{2}\arctan x \cdot \ln(1+x^2)$$

$$- \frac{1}{2}x^2\arctan x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x \cdot \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$$

$$- \frac{1}{2}x^2\arctan x + \frac{3}{2}(x - \arctan x) + C.$$

【2114】 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x.$

解 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}(x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C.$$

【2115】 $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}})}\mathrm{d}x$

$$= \int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(1+x^2) + C.$$

求解含有双曲函数的积分(2116 ~ 2125).

【2116】 $\int \mathrm{sh}^2 x \mathrm{ch}^2 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh}^2 x \mathrm{ch}^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{sh}^2 2x \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{ch}4x - 1}{2}\mathrm{d}(2x) = -\frac{x}{8} + \frac{\mathrm{sh}4x}{32} + C.$$

【2117】 $\int \mathrm{ch}^4 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{ch}^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1 + \mathrm{ch}2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{ch}2x + \frac{1}{4}\mathrm{ch}^2 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{4}\int \frac{1 + \mathrm{ch}4x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\mathrm{sh}4x + C$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{32}\mathrm{sh}4x + C.$$

【2118】 $\int \mathrm{sh}^3 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh}^3 x \mathrm{d}x = \int \mathrm{sh}^3 x \mathrm{sh} x \mathrm{d}x = \int (\mathrm{ch}^2 x - 1)\mathrm{d}(\mathrm{ch} x)$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{ch} x + C.$$

【2119】 $\int \mathrm{sh} x \mathrm{sh}2x \mathrm{sh}3x \mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh} x \mathrm{sh}2x \mathrm{sh}3x \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{2}(\mathrm{ch}4x - \mathrm{ch}2x)\mathrm{sh}2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{ch}4x \mathrm{sh}2x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \mathrm{ch}2x \cdot \mathrm{sh}2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int (\mathrm{sh}6x - \mathrm{sh}2x)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \mathrm{sh}4x \mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{24}\mathrm{ch}6x-\frac{1}{16}\mathrm{ch}4x-\frac{1}{8}\mathrm{ch}2x+C.$$

【2120】 $\int \mathrm{th}x\mathrm{d}x.$

解 $\int \mathrm{th}x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\mathrm{d}x=\ln(\mathrm{ch}x)+C.$

【2121】 $\int \mathrm{cth}^2x\mathrm{d}x.$

解
$$\int \mathrm{cth}^2x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{ch}^2x}{\mathrm{sh}^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{sh}^2x+1}{\mathrm{sh}^2x}\mathrm{d}x$$
$$=x-\mathrm{cth}x+C.$$

【2122】 $\int\sqrt{\mathrm{th}x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\sqrt{\mathrm{th}x}\mathrm{d}x$

$$=\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-4x}}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})}{\sqrt{(\mathrm{e}^{2x})^2-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-2x})^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1})+\frac{1}{2}\arcsin(\mathrm{e}^{-2x})+C.$$

【2123】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+2\mathrm{ch}x}.$

解
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+2\mathrm{ch}x}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{3}\mathrm{e}^x)}{(\sqrt{3}\mathrm{e}^x)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\mathrm{e}^x)+C.$$

【2123.1】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2x-4\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x+9\mathrm{ch}^2x}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2x-4\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x+9\mathrm{ch}^2x}$

$$= 2\int \frac{dx}{3e^{2x} + 8 + 7e^{-2x}} = 2\int \frac{e^{2x} dx}{3e^{4x} + 8e^{2x} + 7}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\left(e^{2x} + \frac{4}{3}\right)}{3\left(e^{2x} + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}} = \frac{1}{12}\int \frac{d\left(e^{2x} + \frac{4}{3}\right)}{\left(e^{2x} + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}}$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{3}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3}{\sqrt{5}}\left(e^{2x} + \frac{4}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{3e^{2x} + 4}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

【2123.2】 $\int \frac{dx}{0.1 + \mathrm{ch}x}$.

解 $\int \frac{dx}{0.1 + \mathrm{ch}x} = \int \frac{dx}{0.1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

$$= \int \frac{2e^x dx}{0.2e^x + e^{2x} + 1} = 2\int \frac{d(e^x + 0.1)}{(e^x + 0.1)^2 + 0.99}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{0.99}} \arctan \frac{e^x + 0.1}{\sqrt{0.99}} + C.$$

【2123.3】 $\int \frac{\mathrm{ch}x dx}{3\mathrm{sh}x - 4\mathrm{ch}x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{ch}x}{3\mathrm{sh}x - 4\mathrm{ch}x} dx = -\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + 7e^{-x}} dx$

$$= -\int \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 7} dx = -\frac{1}{7}\int dx - \frac{6}{7}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 7} dx$$

$$= -\frac{1}{7}x - \frac{3}{7}\ln(e^{2x} + 7) + C.$$

【2124】 $\int \mathrm{sh}ax \sin bx \, dx$.

解 由于 $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + C$

所以 $\int \mathrm{sh}ax \sin bx \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int e^{ax}\sin bx\,dx - \frac{1}{2}e^{-ax}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{e^{-ax}(a\sin bx + b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$$

$$= \frac{a\sin bx \cdot \mathrm{ch}ax - b\cos bx \cdot \mathrm{sh}ax}{a^2+b^2} + C.$$

【2125】 $\int \mathrm{sh}ax\cos bx\,dx.$

解 由 1828 题的结果有

$$\int \mathrm{sh}ax\cos bx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{ax}\cos bx\,dx - \frac{1}{2}\int e^{-ax}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + \frac{1}{2}e^{-ax}\frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2+b^2} + C$$

$$= \frac{a\,\mathrm{ch}ax \cdot \cos bx + b\,\mathrm{sh}ax \cdot \sin bx}{a^2+b^2} + C.$$

§6. 函数的积分法的各种例题

求解下列积分(2126 ～ 2170).

【2126】 $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}.$

解 $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^6(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$$

$$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)}dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{1}{x^4}dx + \int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x+C.$$

【2127】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^3}$.

解 $\int\frac{x^2}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-1+1}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^3}.$$

由 1291 题的递推公式可得

$$\int\frac{x^2}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}-\left[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}\right]$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\left\{-\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\right\}$$

$$=\frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

【2128】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^3-\sqrt{3}x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+C.$$

【2129】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

解 设 $\sqrt[6]{x}=t$,

则 $\sqrt{x}=t^3,\sqrt[3]{x}=t^2,x=t^6,\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t.$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

$$=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(1+t)+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C.$$

【2130】 $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x.$

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$,

则 $x=\frac{1}{1+t^2},\mathrm{d}x=-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$

利用1921题的递推公式

所以
$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$$

$$=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^4}$$

$$=-2\left[\frac{t}{6(t^2+1)^3}+\frac{5t}{24(t^2+1)^2}+\frac{5t}{16(t^2+1)}+\frac{5}{16}\arctan t\right]+C$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}-\frac{5}{8}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C.$$

【2131】 $\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 设 $x=\sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,

则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,所以

$$\begin{aligned}&\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\sin t+2}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t+2\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|-2\cot t+C\\&=\ln|\csc t-\cot t|-2\cot t+C\\&=-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}-2\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.\end{aligned}$$

【2132】 $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x.$

解 设 $\sqrt{1-x\sqrt{x}}=t$,

则 $x=(1-t^2)^{\frac{2}{3}},\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}t(1-t^2)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t.$

所以 $$\begin{aligned}&\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}\int\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}t+C\\&=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C \qquad (0<x<1).\end{aligned}$$

【2133】 $\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$

解 设 $\sqrt{1+x^2}=t$,

则 $x^2=t^2-1,x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$,

所以 $$\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\int(t^2-1)^2\mathrm{d}t$$

$$=\int(t^4-2t^2+1)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^2+t+C$$

$$=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

【2134】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

解 设 $\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}=t$,

则 $$x=\frac{1}{t^3+1},\mathrm{d}x=-\frac{3t^2}{(t^3+1)^2},$$

所以 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=-3\int\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}-\int\frac{t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$$

$$=\ln|t+1|-\frac{1}{2}\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{t^2-t+1}-\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}\right)^2}{\left[\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}}\right]^2-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}+1}$$

$$-\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【2135】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

解 只讨论 $x>0$ 的情形,(对于 $x<0$ 的情形可类似地讨论)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x^{-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3}\right|+C.$$

【2136】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1-2x^{-2}-x^{-4}}}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)}}=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{2}x^2}+C.$$

【2137】 $\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{1-(1-x^2)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{x}-x-2\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{2}{x}-x-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{2}{x}-x-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x+C.$$

【2138】 $\int\frac{(1+x)\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

解 $\int\frac{(1+x)\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{(1+x)(x-\sqrt{x+x^2})}{(x+\sqrt{x+x^2})(x-\sqrt{x+x^2})}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{x+x^2-\sqrt{x+x^2}-x\sqrt{x+x^2}}{-x}\mathrm{d}x$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int \sqrt{x+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+2\int \sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})$$

$$+\int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}+\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$$

$$+\frac{2x+1}{4}\sqrt{x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C_1$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2x+5}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$+\frac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x+x^2})$$

$$-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C_1$$

$$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{2x+5}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C.$$

【2139】 $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$$=-\int \ln(1+x+x^2)\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int \frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\left(\frac{x+2}{1+x+x^2}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{1+x+x^2}dx$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{1}{1+x+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x}dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$$

$$+\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\ln|1+x|+C$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x+x^2}{(1+x)^2}$$

$$+\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

【2140】 $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx$.

解 $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx$

$$=\int\arccos(2x-3)d(x^2+3x)$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)+\int\frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)-\int\sqrt{-x^2+3x-2}dx$$

$$-3\int\frac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx+7\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$

$$-\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$-3\int\frac{d(-x^2+3x-2)}{\sqrt{-x^2+3x-2}}+7\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)2}}$$

$$= (x^2+3x)\arccos(2x-3) - \frac{x-\frac{3}{2}}{2}\sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$-\frac{1}{8}\arcsin(2x-3) - 6\sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$+7\arcsin(2x-3)+C$$

$$=\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)$$

$$-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+C.$$

【2141】 $\int x\ln(4+x^4)\mathrm{d}x.$

解 $\int x\ln(4+x^4)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(4+x^4)\mathrm{d}(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4) - 2\int\frac{x^5}{4+x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4) - 2\int\left(x-\frac{4x}{4+x^4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4) - x^2 + 2\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

【2142】 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\operatorname{sgn}x\int\frac{\arcsin x}{x^3\sqrt{x^{-2}-1}}\mathrm{d}x + \int\arcsin x\,\mathrm{d}(\arcsin x)$$

$$=-\operatorname{sgn}x\int\arcsin x\,\mathrm{d}(\sqrt{x^{-2}-1}) + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\operatorname{sgn}x\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\cdot\arcsin x - \int\frac{\mathrm{d}x}{|x|}\right)+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C.$$

【2143】 $\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int\ln(1+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})$$

$$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

【2144】 $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x.$

解 $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\int\ln\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}[(1+x^2)^{\frac{3}{2}}]$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\int(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x.$$

令 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=t$，则

$x^2+1=t^2, x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，所以

$$\int(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{t^4}{t^2-2}\mathrm{d}t=\int\left(t^2+2+\frac{4}{t^2-2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}t^3+2t+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{x^2+7}{3}\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

因此 $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

【2145】 $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx.$

解 $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$

$$=-\int\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}d(\sqrt{1-x^2})$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)}dx$$

而 $\int\frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)}dx=\int\frac{(1-x^2)(2-x)}{x(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\int\frac{2+x-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=2\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-2\int\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}+\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

$$=-2\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|+\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

$$=-2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

所以 $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$

$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+C. \qquad (0<x<1)$$

【2146】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2}$.

解　设 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，不妨限制 $-\pi<x<\pi$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t+t^2)-\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{1}{2}}{(1+t+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(1+t+t^2)}{(1+t+t^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t+t^2)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t+t^2}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t+t^2)^2}.$$

而由 1921 题递推公式有

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t+t^2)^2}$$

$$=\frac{2t+1}{3(1+t+t^2)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C_1.$$

因此

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{t+2}{6(t^2+t+1)}+C_2$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{6\,\dfrac{1+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}+C_2$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+C.$$

【2147】 $\int\frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\mathrm{d}x.$

解 由于

$$\begin{aligned}&\sin^8 x+\cos^8 x\\&=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x\\&=[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x\\&=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x\\&=\frac{1}{8}(\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8)\\&=\frac{1}{8}(\sin^2 2x-4-2\sqrt{2})(\sin^2 2x-4+2\sqrt{2})\\&=\frac{1}{32}(\cos 4x+7+4\sqrt{2})(\cos 4x+7-2\sqrt{2}),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int\frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\mathrm{d}x\\&=32\cdot\frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\int\frac{\sin 4x}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}\mathrm{d}x\right.\\&\qquad\left.-\int\frac{\sin 4x\mathrm{d}x}{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

【2148】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$

解 设 $\sqrt{1+\cos x}=t$

则 $\sin x=t\sqrt{2-t^2},\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}\mathrm{d}t,$

所以
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=-\int\frac{2}{t^2(2-t^2)}\mathrm{d}t$$
$$=-\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2-t^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}+C$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C.$$

【2149】 $\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\arctan x\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\arctan x\mathrm{d}x=\int\left(a-\frac{a-b}{x^2+1}\right)\arctan x\mathrm{d}x$$
$$=a\int\arctan x\mathrm{d}x-(a-b)\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)$$
$$=ax\arctan x-a\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{a-b}{2}(\arctan x)^2$$
$$=ax\arctan x-\frac{a}{2}\ln(1+x^2)-\frac{a-b}{2}(\arctan x)^2+C.$$

【2150】 $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x$$
$$=\int\left(a+\frac{a+b}{x^2-1}\right)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x$$
$$=a\int\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x+\left(\frac{a+b}{2}\right)\int\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$
$$=ax\ln\frac{x-1}{x+1}-a\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x+\frac{a+b}{4}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)^2$$
$$=ax\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-a\ln|x^2-1|+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

【2151】 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.$

【2152】 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \arctan x d(\sqrt{1+x^2})$

$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$

【2153】 $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx.$

解 $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}} = -\int \frac{d(1+\cos 2x)}{\sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}}$

$= -\ln(1+\cos 2x + \sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}) + C_1$

$= -\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + C.$

【2154】 $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int x^2\arccos x d(\sqrt{1-x^2})$

$= -x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x$

$+\int \sqrt{1-x^2}\left(2x\arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$= -x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x - \int x^2 dx$

$$-\frac{2}{3}\int \arccos x\mathrm{d}[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arccos x$$

$$-\frac{2}{3}\int(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{3}x^3$$

$$-\frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^3+C$$

$$=-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{6x+x^3}{9}+C.$$

【2155】 $\int\frac{x^4\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x^4\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\int\arctan x\mathrm{d}(x^3)-\int\arctan x\mathrm{d}x+\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x-x\arctan x$$

$$+\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x-x\arctan x$$

$$+\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)$$

$$+\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$$

【2156】 $\int\frac{x\operatorname{arccot}x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x\operatorname{arccot}x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\int\operatorname{arccot}x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$=-\frac{\operatorname{arccot}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{\operatorname{arccot}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arccot}x\right]+C$$

$$=-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\operatorname{arccot}x-\frac{x}{4(x^2+1)}+C.$$

【2157】 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx.$

解 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2(1-x^2)}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}dx.$$

设 $x=\tan t\quad\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,

则 $\sqrt{1+x^2}=\sec t, dx=\sec^2 t dt$,

所以 $\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\int\frac{\sec t dt}{1-\tan^2 t}=\int\frac{\cos t dt}{\cos^2 t-\sin^2 t}$$

$$=\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C.$$

因此 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}dx$

$$=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C.$$

【2158】 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx.$

解 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x$

$$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x$$

$$+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

因此 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C.$$

【2159】 $\int x(1+x^2)\operatorname{arccot}x\mathrm{d}x.$

解 $\int x(1+x^2)\operatorname{arccot}x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int\operatorname{arccot}x\mathrm{d}[(1+x^2)^2]$$

$$=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{4}\int(1+x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arccot}x+\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+C.$$

【2160】 $\int x^x(1+\ln x)\mathrm{d}x.$

解 $\int x^x(1+\ln x)\mathrm{d}x=\int e^{x\ln x}(1+\ln x)\mathrm{d}x$

$$=\int e^{x\ln x}\mathrm{d}(x\ln x)=e^{x\ln x}+C=x^x+C.$$

【2161】 $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x=-\int\arcsin e^x\mathrm{d}(e^{-x})$

$$=-e^{-x}\arcsin e^{x}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$=-e^{-x}\arcsin e^{x}-\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}$$

$$=-e^{x}\arcsin e^{x}-\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}-1})+C$$

$$=x-e^{-x}\arcsin e^{x}-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C.$$

【2162】 $\displaystyle\int\frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{x})}dx.$

解 $$\int\frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{x})}dx=\int\frac{(e^{x}+1-e^{x})\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{x})}dx$$

$$=\int e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}\,dx-\int\frac{e^{\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{x}}dx$$

$$=-2\int\arctan e^{\frac{x}{2}}\,d(e^{-\frac{x}{2}})-2\int\arctan e^{\frac{x}{2}}\,d(\arctan e^{\frac{x}{2}})$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}+\int\frac{dx}{1+e^{x}}-(\arctan e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}-(\arctan e^{\frac{x}{2}})^2+\int\left(1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)dx$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}-(\arctan e^{\frac{x}{2}})^2+x-\ln(1+e^{x})+C.$$

【2163】 $\displaystyle\int\frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}.$

解 $$\int\frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}$$

$$=\int\frac{dx}{(e^{x+1}-e^{x-1})(e^{x+1}+e^{x-1}+2)}$$

$$=\int\frac{dx}{e^{x}(e-e^{-1})[e^{x}(e+e^{-1})+2]}$$

$$=\frac{1}{2(e-e^{-1})}\int\left[\frac{1}{e^{x}}-\frac{e+e^{-1}}{e^{x}(e+e^{-1})+2}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{4\operatorname{sh}1}e^{-x}-\frac{\operatorname{ch}1}{4\operatorname{sh}1}\int\frac{1}{1+e^{x}\operatorname{ch}1}dx$$

$$=-\frac{1}{4\operatorname{sh}1}e^{-x}-\frac{\operatorname{ch}1}{4\operatorname{sh}1}\int\left[1-\frac{e^x\operatorname{ch}1}{1+e^x\operatorname{ch}1}\right]dx$$

$$=-\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1}-\frac{\operatorname{cth}1}{4}[x-\ln(1+e^x\operatorname{ch}1)]+C.$$

【2164】 $\int\sqrt{\operatorname{th}^2x+1}\,dx$.

解 $$\int\sqrt{\operatorname{th}^2x+1}\,dx=\int\frac{\operatorname{th}^2x+1}{\sqrt{\operatorname{th}^2x+1}}dx$$

$$=\int\frac{\frac{\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{ch}^2x}}{\sqrt{\operatorname{th}^2x+1}}dx=\int\frac{\left(2-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}\right)}{\sqrt{\operatorname{th}^2x+1}}dx$$

$$=2\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{th}^2x+1}}-\int\frac{d(\operatorname{th}x)}{\sqrt{\operatorname{th}^2x+1}}$$

$$=2\int\frac{\operatorname{ch}x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x}}-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{\operatorname{th}^2x+1})$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{d(\sqrt{2}\operatorname{sh}x)}{\sqrt{1+2\operatorname{sh}^2x}}-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{\operatorname{th}^2x+1})$$

$$=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}\operatorname{sh}x+\sqrt{1+2\operatorname{sh}^2x})$$

$$-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^2x})+C.$$

【2165】 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x\,dx$.

解 $$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx=\int\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x\,dx$$

$$=\int\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\tan\frac{x}{2}\cdot e^x\,dx$$

$$=\int e^x\,d\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}\cdot e^x\,dx$$

$$=e^x\cdot\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}\cdot e^x\,dx+\int\tan\frac{x}{2}\cdot e^x\,dx$$

$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C.$$

【2166】 $\int |x| \mathrm{d}x.$

解 $\int |x| \mathrm{d}x = \operatorname{sgn}x \cdot \int x \mathrm{d}x$

$$= (\operatorname{sgn}x) \cdot \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{x|x|}{2} + C.$$

【2167】 $\int x|x| \mathrm{d}x.$

解 $\int x|x| \mathrm{d}x = (\operatorname{sgn}x)\int x^2 \mathrm{d}x$

$$= (\operatorname{sgn}x)\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^2|x|}{3} + C.$$

【2168】 $\int (x+|x|)^2 \mathrm{d}x.$

解 $\int (x+|x|)^2 \mathrm{d}x = \int (x^2 + 2x|x| + |x|^2) \mathrm{d}x$

$$= 2\int x^2 \mathrm{d}x + 2\operatorname{sgn}x \int x^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(\operatorname{sgn}x)x^3 + C$$

$$= \frac{2}{3}x^2(x+|x|) + C.$$

【2169】 $\int \{|1+x| - |1-x|\} \mathrm{d}x.$

解 $\int \{|1+x| - |1-x|\} \mathrm{d}x$

$$= \int |1+x| \mathrm{d}(1+x) + \int |1-x| \mathrm{d}(1-x)$$

$$= \operatorname{sgn}(1+x)\int (1+x)\mathrm{d}(1+x)$$

$$+ \operatorname{sgn}(1-x)\int (1-x)\mathrm{d}(1-x)$$

$$=\frac{(1+x)\mid 1+x\mid}{2}+\frac{(1-x)\mid 1-x\mid}{2}+C.$$

【2170】 $\int e^{-|x|}dx$.

解　当 $x\geqslant 0$ 时

$$\int e^{-|x|}dx=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C_1,$$

当 $x<0$ 时

$$\int e^{-|x|}dx=\int e^{x}dx=e^{x}+C_2.$$

由于 $e^{-|x|}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故其原函数必在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续可微，且任意两个原函数之间差一常数，设 $F(x)$ 为满足 $F(0)=0$ 的原函数. 由前面的讨论知

$$F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+C_1, & x\geqslant 0,\\ e^{x}+C_2, & x<0.\end{cases}$$

其中 C_1，C_2 是常数，由于

$$0=F(0)=\lim_{x\to -0}F(x),$$

所以　$0=-1+C_1=1+C_2$，

因此　$C_1=1$，　$C_2=-1$，

即　$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ e^{x}-1, & x<0.\end{cases}$

因此　$\int e^{-|x|}dx=F(x)+C$

$$=\begin{cases}1-e^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ e^{x}-1+C, & x<0.\end{cases}$$

【2171】 $\int \max(1,x^2)dx$.

解　当 $|x|\leqslant 1$ 时

$$\int \max(1,x^2)dx=\int dx=x+C_1,$$

当 $x>1$ 时

$$\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C_2,$$

当 $x<-1$ 时

$$\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C_3.$$

设 $F(x)$ 为满足 $F(1)=1$ 的原函数,则上面的讨论知

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{3}x^3 + C_2, & x > 1, \\ \dfrac{1}{3}x^3 + C_3, & x < -1, \end{cases}$$

其中 C_1,C_2,C_3 是常数,由于

$$1 = F(1) = \lim_{x\to 1+0} F(x),$$

有 $$1 = 1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2,$$

故 $$C_1 = 0, C_2 = \frac{2}{3},$$

又 $$F(-1) = \lim_{x\to -1-0} F(x),$$

有 $$-1 = -\frac{1}{3} + C_3,$$

故 $$C_3 = -\frac{2}{3}.$$

从而

$$F(x) = \begin{cases} x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}, & x > 1, \\ \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{2}{3}, & x < -1. \end{cases}$$

因此 $$\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$= \begin{cases} x + C, & \text{当 } |x| \leqslant 1 \text{ 时}, \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\operatorname{sgn}x + C, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

【2172】 $\int \varphi(x)\mathrm{d}x$,其中 $\varphi(x)$ 为 x 数至其最接近的整数的距离.

解 $\varphi(x)=\begin{cases} x-n, & \text{当 } n\leqslant x<n+\frac{1}{2} \text{ 时},\\ -x+n+1, & \text{当 } n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1 \text{ 时}. \end{cases}$

由于 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,故其原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续可微,设 $F(x)$ 是满足 $F(0)=0$ 的原函数,则

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-nx+C_n, & \text{当 } n\leqslant x<n+\frac{1}{2} \text{ 时},\\ -\frac{x^2}{2}+(n-1)x+C'_n, & \text{当 } n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1 \text{ 时}. \end{cases}$$

其中 C_n,C'_n 为常数,由

$$\lim_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)-0} F(x)=F\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

有 $\quad C'_n=C_n-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$,故

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-nx+C_n, & \text{当 } n\leqslant x<n+\frac{1}{2} \text{ 时}\\ -\frac{x^2}{2}+(n+1)x-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+C_n, & \text{当 } n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1 \end{cases}$$

又 $\quad \lim\limits_{x\to(n+1)-0} F(x)=F(n+1)$,可得

$$C_{n+1}=(n+1)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+C_n$$

$$=C_n+n+\frac{3}{4}.$$

显然 $\quad C_0=F(0)=0$,

因此 $\quad C_n=\frac{1}{4}n(2n+1)$. 故

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-nx+\frac{1}{4}n(2n+1), & \text{当 } n\leqslant x<n+\frac{1}{2} \text{ 时},\\ -\frac{x^2}{2}+(n+1)x-\frac{1}{4}(2n+1)(n+1), & \text{当 } n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\left[1-2\left(\dfrac{1}{2}-(x-n)\right)\right] & \text{当 } n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}\text{ 时},\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\left[1-2\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\right] & \text{当 } n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{ 时}.\end{cases}$$

记 $(x)=x-[x]$，即表 x 的小数部分，那么

$$F(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}.$$

故 $$\int\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}+C.$$

【2173】 $\int[x]\,|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x\quad(x\geqslant 0)$

解 在区间$[0,1)$，$[1,2)$，$[2,3)$，…$[[x],x)$上确定满足条件 $F(0)=0$ 的原函数.

在$[0,1)$上

$$F(x)=\int 0\cdot\sin\pi x\mathrm{d}x=C_1,$$

而 $C_1=F(0)=0$，所以

$$F(x)=0,F(1)-F(0)=0.$$

在$[1,2)$上

$$F(x)=-\int\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cos\pi x+C_2,$$

$$C_2=\frac{1}{\pi},F(2)-F(1)=\frac{2}{\pi},$$

在$[2,3)$上

$$F(x)=2\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\cos\pi x+C_3,$$

$$C_3=F(2)+\frac{2}{\pi}=\frac{2\cdot 2}{\pi},$$

$$F(3)-F(2)=\frac{2\cdot 2}{\pi},$$

…

在$[[x],x)$上

$$F(x)=(-1)^{[x]}[x]\int\sin\pi x\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{[x]}[x]\left(-\frac{1}{\pi}\right)\cos\pi x+C_{[x]+1},$$

从而 $$F(x)-F([x])=\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x),$$

即 $$F(x)=(F(1)-F(0))+(F(2)-F(1))+\cdots$$

$$+(F([x])-F([x]-1))$$

$$+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{2\cdot 2}{\pi}+\cdots+\frac{2([x]-1)}{\pi}$$

$$+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)$$

$$=\frac{[x]\cdot([x]-1)}{\pi}+\frac{(-1)^{[x]}\cdot[x]\cdot(-1)^{[x]}}{\pi}$$

$$-\frac{(-1)^{[x]}\cdot[x]\cos\pi x}{\pi}$$

$$=\frac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x).$$

因此 $$\int[x]\mid\sin\pi x\mid\mathrm{d}x$$

$$=\frac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)+C.$$

【2174】 $\int f(x)\mathrm{d}x$,其中

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时},\\ 1-|x| & \text{当 } |x|>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

解 当$|x|\leqslant 1$时

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1-x^2)\mathrm{d}x=x-\frac{x^3}{3}+C_1,$$

当 $x>1$ 时

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1-x)\mathrm{d}x=x-\frac{x^2}{2}+C_2,$$

$x<-1$ 时

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1+x)\mathrm{d}x=x+\frac{x^2}{2}+C_3,$$

设 $F(x)$ 为 $F(0)=0$ 的原函数. 则

$$C_1=0,F(1+0)=\frac{1}{2}+C_2=F(1)=1-\frac{1}{3},$$

$$F(-1-0)=-\frac{1}{2}+C_3=F(-1)=-1+\frac{1}{3},$$

所以 $\quad C_1=0,C_2=\frac{1}{6},C_3=-\frac{1}{6}.$

从而

$$F(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x^3}{3}, & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时},\\ x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{6}, & \text{当 } x>1 \text{ 时},\\ x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}, & \text{当 } x<-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-\dfrac{x^3}{3}, & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时},\\ x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}\operatorname{sgn}x, & \text{当 } |x|>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

因此 $\quad\int f(x)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}x-\dfrac{x^3}{3}+C, & |x|\leqslant 1,\\ x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}\operatorname{sgn}x+C & |x|>1.\end{cases}$$

【2175】 $\int f(x)\mathrm{d}x$;式中

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若 -\infty<x<0;\\ x+1, & 若 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x, & 若 1<x<+\infty.\end{cases}$$

解 当 $-\infty<x<0$ 时

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C_1,$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int (x+1)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+x+C_2,$$

当 $1<x<+\infty$ 时

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C_3,$$

设 $F(x)$ 为满足 $F(0)=0$ 的原函数，则由 $C_2=F(0)=0$

及 $$C_1=F(0-0)=F(0)=0,$$

$$F(1+0)=1+C_3=F(1)=\frac{1}{2}+1,$$

所以 $$C_1=0, C_2=0, C_3=\frac{1}{2}.$$ 即

$$F(x)=\begin{cases}x, & 当 -\infty<x<0 时,\\ \dfrac{x^2}{2}+x, & 当 0\leqslant x\leqslant 1 时,\\ x^2+\dfrac{1}{2}, & 当 1<x<+\infty 时.\end{cases}$$

因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C, & 当 -\infty<x<0 时,\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & 当 0\leqslant x\leqslant 1 时,\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & 当 1<x<+\infty 时.\end{cases}$$

【2176】 求解 $\int xf''(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int xf''(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(f'(x))=xf'(x)-\int f'(x)\mathrm{d}x$

$$= xf'(x) - f(x) + C.$$

【2177】 求解$\int f'(2x)\mathrm{d}x$.

解 $\int f'(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f'(2x)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}f(2x) + C.$

【2178】 若 $f'(x^2) = \frac{1}{x}(x > 0)$,求解 $f(x)$.

解 由 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$,

得 $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

于是 $$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

【2179】 若 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$,求解 $f(x)$.

解 由 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

得 $$f'(x) = 1 - x.$$

所以 $$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int (1-x)\mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + C. \qquad (|x| \leqslant 1)$$

【2180】 若

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 < x \leqslant 1, \\ x, & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

且 $f(0) = 0$,求解 $f(x)$.

解 设 $t = \ln x$,

则 $$f'(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } -\infty < t \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^t, & \text{当 } 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

于是 $$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C_1, & -\infty < x \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^x + C_2, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 为常数,由假设有 $f(0) = 0$,从而

$$C_1 = f(0) = 0,$$

及 $$C_2+1=f(1+0)=f(0)=0,$$
$$C_2=-1.$$
因此 $$f(x)=\begin{cases}x, & 当 -\infty<x\leqslant 0 时,\\ e^x-1, & 当 0<x<+\infty 时.\end{cases}$$

【2180.1】 设 $f(x)$ 为连续单调函数且 $f^{-1}(x)$ 为它的反函数. 证明:若 $\int f(x)dx=F(x)+C$,

则 $$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$

研究例题:

(1) $f(x)=x^n(n>0)$; (2) $f(x)=e^x$;

(3) $f(x)=\arcsin x$; (4) $f(x)=\operatorname{arth}x$.

证 $$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-\int xd(f^{-1}(x)),$$

令 $$t=f^{-1}(x),$$
则 $$x=f(t).$$
所以 $$\int xd(f^{-1}(x))=\int f(t)dt=F(t)+C$$
$$=F(f^{-1}(x))+C,$$
因此 $$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$

(1) $f(x)=x^n$,

则 $$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1},$$
$$f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}},$$
所以 $$\int f^{-1}(x)dx=\int x^{\frac{1}{n}}dx$$
$$=x\cdot x^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}(x^{\frac{1}{n}})^{n+1}+C$$
$$=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+C.$$

(2) $f(x)=e^x$,

则 $F(x)=\mathrm{e}^x, f^{-1}(x)=\ln x$,

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}x$$

$$=x\cdot\ln x-\mathrm{e}^{\ln x}+C$$

$$=x\ln x-x+C.$$

(3) $f(x)=\arcsin x, g(x)=f^{-1}(x)=\sin x$.

从而 $\int g(x)\mathrm{d}x=\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

所以 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int g^{-1}(x)\mathrm{d}x$

$$=x\arcsin x-\cos(\arcsin x)+C$$

$$=x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

(4) $f(x)=\operatorname{arth}x, g(x)=f^{-1}(x)=\operatorname{th}x$,

而 $\int g(x)\mathrm{d}x=\int \operatorname{th}x\mathrm{d}x=\ln(\operatorname{ch}x)+C$,

所以 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int g^{-1}(x)\mathrm{d}x=x\operatorname{arth}x-\ln(\operatorname{ch}(\operatorname{arth}x))+C$.

第四章 定积分

§1. 定积分作为和的极限

1. **黎曼积分** 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$区间有定义,而且

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

则数 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, ①

(其中 $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$),称为函数 $f(x)$ 在$[a,b]$区间的积分.

极限 ① 存在的必要且充分条件为:积分下和 $\underline{S} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$ 与积分上和 $\overline{S} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$,在 $\max|\Delta x_i| \to 0$ 时有共同的极限.式中

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x) \qquad 及 \qquad M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

若等式 ① 右边的极限存在,则函数 $f(x)$ 称为在相应区间内可积分(常义的).特别是:(1) 连续函数;(2) 具有有穷个不连续点的有界函数;(3) 单调有界函数等,均在任意有穷区间内可积分.若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$区间无界,则它在$[a,b]$区间常义上不可积分.

2. **可积分条件** 函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$可积分的充要条件是以下等式成立:

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$,为函数 $f(x)$ 在$[x_i, x_{i+1}]$的振幅.

【2181】 把区间$[-1,4]$分为 n 个相等子区间,并取这些子

区间的中点作自变量值 $\xi_i(i=0,1,\cdots,n-1)$，求函数 $f(x)=1+x$ 在该区间的积分和 S_n.

解 每个子区间的长度 $\Delta x=\frac{5}{n}$,

第 i 个子区间为$\left(-1+\frac{5i}{n},-1+\frac{5(i+1)}{n}\right)$，其中

$$\xi_i=-1+\frac{5}{n}\left(i+\frac{1}{2}\right),$$

于是，所求积分和为

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left[1+\left(-1+\frac{5}{n}\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)\right]\frac{5}{n}$$

$$=\frac{25}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{2}.$$

【2182】 若

(1) $f(x)=x^3\quad[-2\leqslant x\leqslant 3]$;

(2) $f(x)=\sqrt{x}\quad[0\leqslant x\leqslant 1]$;

(3) $f(x)=2^x\quad[0\leqslant x\leqslant 10]$.

把相应区间分成 n 个等份，求出给定函数 $f(x)$ 在相应区间的积分上和$\overline{S}_n$ 与积分下和$\underline{S}_n$.

解 (1) 将区间$[-2,3]$ n 等分，则每一个子区间的长为 $\Delta x=\frac{5}{n}$，且第 i 个子区间为

$$\left[-2+\frac{5i}{n},-2+\frac{5(i+1)}{n}\right]\qquad(i=0,1,\cdots,n-1)$$

设 m_i，M_i 分别表示函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间上的上确界及下确界. 而 $f(x)=x^3$ 为增函数，所以

$$m_i=\left(-2+\frac{5i}{n}\right)^3,M_i=\left[-2+\frac{5(i+1)}{n}\right]^3$$
$$(i=0,1,2,\cdots,n-1),$$

所以 $\underline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(-2+\frac{5i}{n}\right)^3\frac{5}{n}$

$$= -8n\cdot\frac{5}{n}+12\left(\frac{5}{n}\right)^2\sum_{i=0}^{n-1}i-6\left(\frac{5}{n}\right)^3\sum_{i=0}^{n-1}i^2$$

$$+\left(\frac{5}{n}\right)^4\sum_{i=0}^{n-1}i^3$$

$$= -40+\frac{12\cdot 25(n-1)}{2n^2}-\frac{125(2n^3-3n^2+n)}{n^3}$$

$$+\frac{625(n^4-2n^3+n^2)}{4n^4}$$

$$= \frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2},$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(-2+\frac{5}{n}(i+1)\right)^3\frac{5}{n}$$

$$= \underline{S_n}+3^3\cdot\frac{5}{n}-(-2)^3\frac{5}{n}=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$$

(2) $\Delta x=\frac{1}{n},m_i=\sqrt{\frac{i}{n}},M_i=\sqrt{\frac{i+1}{n}}$

$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,

于是 $\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{i}$,

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i+1}{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}=\underline{S_n}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

(3) $\Delta x=\frac{10}{n},m_i=2^{i\Delta x},M_i=2^{(i+1)\Delta x}$

$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,

于是 $\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x m_i=\frac{10}{n}\sum_{i=0}^{n-1}2^{i\Delta x}$

$$= \frac{10}{n}\cdot\frac{2^{n\Delta x}-1}{2^{\Delta x}-1}=\frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)},$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x M_i=\frac{10}{n}\sum_{i=0}^{n-1}2^{(i+1)\Delta x}$$

$$= \frac{10}{n}\frac{2^{\Delta x}(2^{n\Delta x}-1)}{2^{\Delta x}-1}=\frac{10230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}.$$

【2183】 把区间[1,2]分成 n 份,使这些分点的横坐标构成等比级数,求函数 $f(x)=x^4$ 在区间[1,2]的下积分和. 当 $n\to\infty$ 时,这个和的极限等于什么?

解 设 $2=q^n$,即

$q=\sqrt[n]{2}$. 分点为

$1=q^0<q^1<q^2<\cdots<q^n=2.$

由于 $f(x)=x^4$ 在[1,2]上为增函数,故积分下和为

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[(q^i)^4(q^{i+1}-q^i)]$$

$$=(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q^i)^5=\frac{(q-1)(q^{5n}-1)}{q^5-1}$$

$$=\frac{31(\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{32}-1},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=31\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$$

$$=31\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{16}+\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1}=\frac{31}{5}.$$

【2184】 根据积分的定义,求出 $\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t$,其中 v_0 与 g 为常数.

解 $f(t)=v_0+gt$,容易验证 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ 存在.

将$[0,T]$ n 等分,则 $\Delta x=\dfrac{T}{n}$,取

$$\xi_i=i\Delta x\qquad(i=0,1,2,\cdots,n-1),$$

于是
$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(v_0+ig\Delta x)\Delta x$$

$$=v_0T+\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2},$$

因此
$$\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\left(v_0T+\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$= v_0 T + \frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方式划分积分的区间，把积分看作对应积分和的极限，并计算定积分：

【2185】 $\int_{-1}^{2} x^2 \mathrm{d}x.$

解 将区间$[-1,2]n$ 等分，则

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{3}{n},$$

取 $\xi_i = -1 + i\Delta x \quad (i = 0,1,2,\cdots,n-1),$

作和 $S_n = \sum_{i=0}^{n-1}(-1 + i\Delta x)^2 \Delta x$

$$= n\Delta x - 2\Delta x^2 \sum_{i=0}^{n-1} i + \Delta x^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = 3 + \frac{9-9n}{2n^2}.$$

因为 $f(x)$ 在$[-1,2]$上连续，故$\int_{-1}^{2} x^2 \mathrm{d}x$ 存在，因此

$$\int_{-1}^{2} x^2 \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{9-9n}{n^2}\right) = 3.$$

【2186】 $\int_0^1 a^x \mathrm{d}x \quad (a > 0).$

解 当 $a \neq 1$ 时，将区间$[0,1]n$ 等分，$\Delta x = \frac{1}{n}$，取

$$\xi_i = \frac{i}{n} \quad (i = 0,1,2,\cdots,n-1),$$

作和式 $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} a^{\frac{i}{n}} = \frac{\frac{1}{n}(a^{n\cdot\Delta x} - 1)}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\frac{1}{n}(a-1)}{a^{\frac{1}{n}} - 1},$

于是 $\int_0^1 a^x \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}(a-1)}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{a-1}{\ln a}.$

当 $a = 1$ 时，显然积分为 1.

【2187】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x.$

解 将区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]n$等分，得$\Delta x=\frac{\pi}{2n}$，取

$$\xi_i=i\Delta x=\frac{i\pi}{2n}\qquad(i=0,1,2,\cdots,n-1),$$

作和式 $S_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Delta x\sin i\Delta x$，

由于 $\sin i\Delta x=\dfrac{1}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\left[\cos\dfrac{2i-1}{2}\Delta x-\cos\dfrac{2i+1}{2}\Delta x\right]$，

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{\Delta x}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2i-1}{2}\Delta x-\cos\frac{2i+1}{2}\Delta x\right)\\&=\frac{\Delta x}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\left(\cos\frac{\Delta x}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}\Delta x\right)\\&=\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{2n-1}{4n}\pi\right),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{2n-1}{4n}\pi\right)\\&=1.\end{aligned}$$

【2188】 $\int_0^x\cos t\mathrm{d}t$.

解 将区间$[0,x]n$等分，得$\Delta t=\frac{x}{n}$，取

$$\xi_i=i\Delta t=\frac{ix}{n}\qquad(i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

作和式 $S_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Delta t\cos i\Delta t$，由于

$$\cos i\Delta t=\frac{1}{2\sin\frac{\Delta t}{2}}\left(\sin\frac{2i+1}{2}\Delta t-\sin\frac{2i-1}{2}\Delta t\right),$$

从而 $$S_n = \sum_{i=0}^{n} \Delta t \cos i\Delta t$$
$$= \frac{\Delta t}{2\sin\frac{\Delta t}{2}}\left[\sin\frac{2n-1}{2}\Delta t + \sin\frac{\Delta t}{2}\right]$$
$$= \frac{\frac{x}{2n}}{\sin\frac{x}{2n}}\left[\sin\frac{2n-1}{2n}x + \sin\frac{x}{2n}\right],$$

因此 $$\int_0^x \cos t\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2n}}{\sin\frac{x}{2n}}\left[\sin\frac{2n-1}{2n}x + \sin\frac{x}{2n}\right]$$
$$= \sin x.$$

【2189】 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad (0 < a < b).$

提示:设 $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}} (t = 0,1,\cdots,n)$.

解 将区间$[a,b]n$等分,设分点为
$$a = x_0 < x_1 < x_1 \cdots < x_n = b,$$
取 $$\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}} \qquad (i = 0,1,2,\cdots,n-1),$$
显然 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$,作和
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^{-2}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x_i x_{i+1}}(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$
因此 $$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

【2190】 $\int_a^b x^m \mathrm{d}x \quad (0 < a < b; m \neq -1).$

提示:选择分点,使得它们的横坐标 x_i 形成几何级数.

解 选取诸分点,使得它们的横坐标 x_i 形成一几何级数,即
$$0 < aq < aq^2 < \cdots < aq^i < \cdots < aq^{n-1} < aq^n = b,$$

其中 $q=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$,取

$\xi_i=aq^i \quad (i=0,1,2,\cdots,n-1)$,作和式

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^m\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^m(aq^{i+1}-aq^i)$$
$$=a^{m+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}q^{(m+1)i}$$
$$=a^{m+1}(q-1)\frac{q^{n(m+1)}-1}{q^{m+1}-1}$$
$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{q-1}{q^{m+1}-1}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}q=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}=1$,所以

$$\int_a^b x^m\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{q-1}{q^{m+1}-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{q^m+q^{m-1}+\cdots+q+1}$$
$$=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

【2191】 $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (0<a<b)$.

解 取 $n+1$ 个分点 $x_0,x_1,\cdots x_{n-1},x_n$,使其成等比级数即分点为

$$a<aq<aq^2<\cdots<aq^i<\cdots<aq^{n-1}<aq^n=b$$

其中 $q=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$,取

$\xi_i=aq^i \quad (i=0,1,2,\cdots,n-1)$,

作和 $$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^{-1}(aq^{i+1}-aq^i)$$
$$=n(q-1)=n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right).$$

所以 $$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln\frac{b}{a}.$$

【2192】 计算泊松积分,当 $|\alpha| < 1$; $|\alpha| > 1$ 时

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\mathrm{d}x.$$

提示:利用多项式 $\alpha^{2n} - 1$ 二次因子分解.

解 因为

$$(1 - |\alpha|)^2 \leqslant 1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2,$$

所以当 $|\alpha| \neq 1$ 时,$\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)$ 是连续的,故积分存在. 将区间 $[0,\pi]$ n 等分,作和式

$$S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right)$$

$$= \frac{k}{\pi}\ln\left[(1+\alpha)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right)\right].$$

另一方面 $t^{2n} - 1 = 0$ 有 $2n$ 根,它们分别为

$$\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n-1),$$

$$\overline{\varepsilon_k} = \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n-1),$$

及 $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = -1$,其中 $i = \sqrt{-1}$,所以

$$t^{2n} - 1 = (t+1)(t-1)\prod_{k=1}^{n-1}(t - \varepsilon_k)(t - \overline{\varepsilon_k})$$

$$= (t^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2t\cos\frac{k\pi}{n} + t^2\right),$$

故 $$S_n = \frac{\pi}{n}\ln\frac{(1+\alpha)^2(\alpha^{2n} - 1)}{\alpha^2 - 1}$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n} - 1)\right].$$

因此(1) 当 $|\alpha| < 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. 故

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=0.$$

(2) 当 $|\alpha|>1$ 时

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\cdot\alpha^{2n}\right]$$

$$=2\pi\ln|\alpha|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{\alpha^{2n}}\right)\right].$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\pi\ln|\alpha|$. 故

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=2\pi\ln|\alpha|.$$

【2193】 设函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 证明:

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1},x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}(i=0,1,\cdots,n-1)$

及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i(x_0=a,x_n=b)$.

证 因为 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续,故 $f(x)\varphi(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续. 所以,积分 $\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 存在,且

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i, \qquad ①$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故有界. 所以存在常数 $M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M(x\in[a,b])$,又 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而一致连续,因此,$\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$. 使得当 $\max|\Delta x_i|<\delta$ 时

$$|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}.$$

从而

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i-\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)[\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)]\Delta x_i\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)||\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)||\Delta x_i|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M \cdot \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \mid \Delta x_i \mid$$
$$= \varepsilon.$$

因此 $$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right]$$
$$= 0. \qquad ②$$

由 ① 及 ② 式可得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i.$$

【2193.1】 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有界且单调，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

证 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调有界函数，所以 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在，并且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\max|\Delta x_k|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

将 $[0,1]$ n 等分，则 $\Delta x_k = \Delta x = \frac{1}{n}$. 取

$$\xi_k = \frac{k+1}{n} \qquad (i = 0,1,2,\cdots n-1),$$

则有 $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n},$$

亦即 $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

【2193.2】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且为凸函数（见 1312）. 证明：

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证 因为 $f(x)$ 为有界的凸函数，所以 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连

续函数，从而$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在. 由于$f(x)$为凸函数，所以$y=f(x)$的图形位于连结$(a,f(a))$，$(b,f(b))$两的弦的上方，且位于点$\left(\frac{a+b}{2},f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$切线的下方，亦即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\leqslant f(x)$$
$$\leqslant f'\left(\frac{b+a}{2}\right)\left(x-\frac{b+a}{2}\right)+f\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

从而有
$$\int_a^b\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+f(a)\right]\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^b\left[f'\left(\frac{b+a}{2}\right)\left(x-\frac{b+a}{2}\right)+f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right]\mathrm{d}x.$$

容易计算得
$$\int_a^b\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+f(a)\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$
$$\int_a^b\left[f'\left(\frac{b+a}{2}\right)\left(x-\frac{b+a}{2}\right)+f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$=(b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right).$$

因此
$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant(b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right).$$

【2193.3】 设当$x\in[1,+\infty)$时$f(x)\in C^{(2)}[1,+\infty)$

且
$$f(x)\geqslant 0,f'(x)\geqslant 0,f''(x)\leqslant 0.$$

证明：当$n\to\infty$时，

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{2}f(n)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x+O(1), \quad ①$$

证 由于 $f'(x) \geqslant 0, f''(x) \leqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是单调增加且凸的函数，利用 2193.2 的结果有

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k+1)+f(k)}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n)}{2},\end{aligned}$$

即
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x. \quad ①$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{2}f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(k+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(n)+f\left(n-\frac{1}{2}\right)\right) + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{f\left(k+\frac{1}{2}\right)+f\left(k-\frac{1}{2}\right)}{2} \\ &\quad + f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1) \\ &\leqslant f\left(n-\frac{1}{4}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1),\end{aligned}$$

即
$$\frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) + O(1). \quad ②$$

结合 ① 及 ② 式，我们有

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + O(1).$$

【2193.4】 设 $f(x) \in C^{(1)}[a,b]$，且

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}n\Delta_n$.

解 记 $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}\qquad(k=1,\cdots,n)$.

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\mathrm{d}x.$$

由于 $f(x)\in C^{(1)}[a,b]$,故当 n 充分大时,我们有

$$f(x)-f(x_k)=f'(x_k)(x-x_k)+o(x-x_k)\qquad(x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k)$$

所以 $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\mathrm{d}x$

$$=\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f'(x_k)(x-x_k)+o(x-x_k)]\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}f'(x_k)(x_k-x_{k-1})^2+o((x_k-x_{k-1})^2)$$
$$=-\frac{1}{2}f'(x_k)\frac{(b-a)^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\Delta_n$

$$=\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}(b-a)\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f'(x_k)\frac{b-a}{n}+\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}(b-a)\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to+\infty}n^2\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}(b-a)f(x)\Big|_a^b+0$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)-f(b)].$$

【2194】 证明不连续函数

$$f(x)=\mathrm{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

在区间[0,1]可积分.

证 显然 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$在[0,1]上有界,其不连续点是$0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$并且,$f(x)$在[0,1]的任何部分区间上的振幅$\omega\leqslant 2$.任给$\varepsilon>0$,$f(x)$在$\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$上只有有限个第一类间断点,故$f(x)$在$\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$上可积.因此,存在$\eta>0$,使对$\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$的任何分法,只要$\max|\Delta x_i|<\eta$,就有$\sum\limits_i\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{5}$.

令 $\delta=\max\left\{\frac{\varepsilon}{5},\eta\right\}$,设$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$是[0,1]上满足$\max|\Delta x_i|<\delta$的分法.

设 $x_k<\frac{\varepsilon}{5}<x_{k+1}$,则有

$$\sum_{i=k+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{5},\sum_{i=0}^{k}\omega_i\Delta x_i\leqslant 2\sum_{i=0}^{k}\Delta x_i<\frac{4\varepsilon}{5}$$

故 $$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,\text{即}$$

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$因此,$f(x)$在[0,1]上可积.

【2195】 证明黎曼函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\\ \frac{1}{n}, & \text{若 } x=\frac{m}{n},\end{cases}$$

(其中m与$n(n\geqslant 1)$为互质整数)在任何有穷区间可积分.

证 设有限区间为$[a,b]$,对于任意给定的$\varepsilon>0$,取定一自然数$N>\frac{2}{\varepsilon}$,则在$[a,b]$上分母$n\leqslant N$的有理数$\frac{m}{n}$只有限个,设为k_N个.取$\delta=\frac{\varepsilon}{4k_N}$,则对于$[a,b]$的任意满足$\max\Delta_i<\delta$的分法,

将所有的子区间分为两类，第一类为包含分母 $n \leqslant N$ 的有理数$\frac{m}{n}$的所有子区间. 而把不包含上述数的那些区间列为第二类，对于第一类区间，振幅 $\omega_i \leqslant 1$，区间的个数不超过 $2k_N$，而它们长度的总和不超过 $2k_N\delta$. 对于第二数，由于这些区间除无理数外，仅含分母 $n > N$ 的有理数$\frac{m}{n}$，而在这些有理点$\frac{m}{n}$上，

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N},$$

所以振幅 $\omega_i < \frac{1}{N}$.

因此 $$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i \Delta x_i < 2k_N\delta + \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即 $$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i \Delta x_i = 0.$$

所以，$\varphi(x)$ 在$[a,b]$上可积.

【2196】 证明函数：

$$若\ x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]及\ f(0) = 0$$

在区间$[0,1]$可积分.

证 函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有界，其不连续点为 $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，并且，$f(x)$ 在$[0,1]$上的任何子区间的振幅 $\omega \leqslant 1$.

任给 $\varepsilon > 0$，由于 $f(x)$ 在$\left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$上只有限个第一类间断点，故 $f(x)$ 在$\left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$上可积. 因此存在 $\eta > 0$，使得对$\left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$上的任何分法当 $\max|\Delta x_i| < \eta$ 时，就有 $\sum \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$，令 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \eta\right\}$，设 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ 是$[0,1]$上一个

分法且满足 $\max|\Delta x_i|<\delta$. 设 $x_k<\frac{\varepsilon}{3}<x_{k+1}$，从而有 $\sum\limits_{i=k+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}$. 又

$$\sum_{i=0}^{k}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{k}\Delta x_i<\frac{2\varepsilon}{3},$$

故
$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

即
$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

因此，$f(x)$ 在$[0,1]$上可积.

【2197】 证明狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\end{cases}$$

在任何区间不可积分.

证 在$[a,b]$上的任何子区间上 $\chi(x)$ 的振幅 $\omega_i=1$，所以，对任何分划有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=b-a,$$

它不趋于零. 因此函数 $\chi(x)$ 在$[a,b]$上不可积分.

【2198】 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$区间可积分，且

当 $x_i\leqslant x<x_{i+1}$ 时，$f_n(x)=\sup f(x)$，

其中 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)(i=0,1,\cdots,n-1;n=1,2,\cdots)$.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证 $f_n(x)$ 是阶梯函数，其间断点不超过 $n-1$，且为第一类间断点，因此$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在. 又

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_i\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i,$$

而 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0, \qquad \left(\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\right)$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

【2199】 证明：若函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上可积分，则存在连续函数 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 的序列，使得当 $a\leqslant c\leqslant b$ 时，

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n(x)\,dx.$$

证 将区间$[a,b]$ n 等分，设分点为

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b,$$

其中 $$x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a) \qquad (i=0,1,2,\cdots,n).$$

在作 $\varphi_n(x)$ 使其在$[x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}]$上为过点$(x_i^{(n)},f(x_i^{(n)}))$及$(x_{i+1}^{(n)},f(x_{i+1}^{(n)}))$的直线段. 即

$$\varphi_n(x) = f(x_i^{(n)}) + \frac{x-x_i^{(n)}}{x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}}[f(x_{i+1}^{(n)}-f(x_i^{(n)})],$$

$$x_i^{(n)} \leqslant x \leqslant x_{i+1}^{(n)},$$

则 $\varphi_n(x)$ 在$[a,b]$上的连续函数，因此，$\varphi_n(x)$ 在$[a,b]$上可积.

令 $m_i^{(n)}$，$M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$ 分别表示 $f(x)$ 在$[x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}]$上的下确界，上确界及振幅，则当 $x\in[x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}]$ 时，

$$m_i^{(n)} \leqslant \varphi_n(x) \leqslant M_i^{(n)},\ m_i^{(n)} \leqslant f(x) \leqslant M_i^{(n)}$$

从而 $|\varphi_n(x)-f(x)| \leqslant \omega_i^{(n)}$，于是，当 $a\leqslant c\leqslant b$ 时，

$$\left|\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^c \varphi_n(x)\,dx\right|$$

$$\leqslant \int_a^c |f(x) - \varphi_n(x)| \, dx$$

$$\leqslant \int_a^b |\varphi_n(x) - f(x)| \, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} |f(x) - \varphi_n(x)| \, dx$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)}.$$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且 $\Delta x_i^{(n)} = \dfrac{b-a}{n} \to 0$,故

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)} = 0.$$

因此 $$\lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx.$$

【2200】 证明:若有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积分,则它的绝对值 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 区间也可积分,而且

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

证 因为 $\big| |f(x')| - |f(x'')| \big| \leqslant |f(x') - f(x'')|$,所以函数 $|f(x)|$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅 ω'_i 不超过 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅 ω_i. 因而

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,故

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

从而 $$\lim_{\max|\Delta x_i|} \sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i = 0,$$

即 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积,又

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以 $$-\int_a^b |f(x)| \, dx \leqslant \int_a^b f(x) \, dx \leqslant \int_a^b |f(x)| \, dx,$$

即 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

【2201】 令函数 $f(x)$ 在$[a,b]$区间绝对可积分，亦即积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 存在，这个函数在$[a,b]$是可积函数吗？

研究例题

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ -1, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

解 $f(x)$ 在$[a,b]$上不一定可积，例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

$f(x)$ 在$[a,b]$上的任何子区间上的振幅 $\omega_i=2$，所以

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=2(b-a),$$

它不趋向于零，于是 $f(x)$ 在$[a,b]$上不可积，显然，$|f(x)|\equiv 1$ 在$[a,b]$上可积.

【2202】 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上可积分，且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，而函数 $\varphi(x)$ 在区间$[A,B]$有定义且是连续的，证明函数 $\varphi(f(x))$ 在区间$[a,b]$上可积分.

证 因为 $\varphi(x)$ 在$[A,B]$上连续，从而一致连续，故任给 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得对于$[A,B]$上的任一子区间，只要其长度小于 η，函数 φ 在其上的振幅小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 又设 Ω 为 $\varphi(x)$ 在$[A,B]$上的振幅，则 $\Omega>0$，否则 $\varphi(f(x))$ 为常数函数，当然可积. 又 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，故必有 $\delta>0$，使得对$[a,b]$的任一分法，只要

$\max|\Delta x_i|<\delta$，就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega},$$

其中 $\omega_i(f)$ 为 $f(x)$ 在$[x_i,x_{i+1}]$上的振幅.

下面证明对$[a,b]$的任何分法，只要

$$\max|\Delta x_i|<\delta,$$

就有 $$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i<\varepsilon,$$

其中$\omega_i(\varphi(f))$表示$\varphi((f))$在$[x_i,x_{i+1}]$上的振幅. 事实上,将于区间$[x_i,x_{i+1}]$分为两组,第一组是满足$\omega_i(f)<\eta$的,其下标集记为Ⅰ,其余的为第二组,其下标集记为Ⅱ,于是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i\\&=\sum_{i\in \mathrm{I}}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i+\sum_{i\in \mathrm{II}}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i\in \mathrm{I}}\Delta x_i+\Omega\sum_{i\in \mathrm{II}}\Delta x_i,\end{aligned}$$

但
$$\begin{aligned}\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}&>\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i\geqslant\sum_{i\in \mathrm{II}}\omega_i(f)\Delta x_i\\&\geqslant\eta\sum_{i\in \mathrm{II}}\Delta x_i,\end{aligned}$$

从而
$$\sum_{i\in \mathrm{II}}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2\Omega},$$

因此
$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+\Omega\cdot\frac{\varepsilon}{2\Omega}=\varepsilon.$$

故$\varphi(f(x))$在$[a,b]$上可积.

【2203】 若函数$f(x)$与$\varphi(x)$可积分,那么,函数$f(\varphi(x))$也一定可以积分吗?

研究例题

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x=0,\\1, & 若\ x\neq 0.\end{cases}$$

和$\varphi(x)$为黎曼函数(见题 2195).

解　$f(\varphi(x))$不一定可积,例如

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x=0,\\1, & 若\ x\neq 0.\end{cases}$$

及黎曼函数(见 2195 题)

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\ 为无理数,\\\dfrac{1}{n}, & 若\ x=\dfrac{m}{n}.\end{cases}$$

在任何有限区间内均可积,但

$$f(\varphi(x))=\chi(x)=\begin{cases}0 & 当\ x\ 为无理数,\\1 & 当\ x\ 为有理数.\end{cases}$$

在任何有限的区间上不可积分.

【2204】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[A,B]$ 上可积分，证明：$f(x)$ 具有积分连续性质，亦即

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0,$$

其中 $[a,b]\subset[A,B]$.

证 利用 2199 题的结果可得，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $[A,B]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$，使得

$$\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上一致连续，故存在 $\delta>0$，使得当 $x',x''\in[A,B]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

于是，当 $|h|<\delta$ 时

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\right|dx\\
&\leqslant\int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|\,dx+\int_a^b |\varphi(x+h)\\
&\quad-\varphi(x)|\,dx+\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx\\
&\leqslant 2\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|\,dx+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|\,dx\\
&<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $$\lim_{R\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0.$$

【2205】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积分，证明等式

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=0$$

只有在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 的所有连续点处 $f(x)=0$ 才能成立.

证 采用反证法，设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，但 $f(x_0)\neq 0$，则存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 时，

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{|f(x_0)|}{2},$$

即 $$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2},$$

从而 $$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x>\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)\mathrm{d}x>\frac{f^2(x_0)}{4}2\delta$$
$$=\frac{\delta f^2(x_0)}{2}>0,$$

这与假设$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$相矛盾.

§2. 用不定积分计算定积分的方法

1. **牛顿—莱布尼茨公式** 若函数$f(x)$在$[a,b]$区间有定义而且是连续的，$F(x)$是它的原函数，即$F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

当$f(x)\geqslant 0$时，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的几何意义是表示由曲线$y=f(x)$，Ox轴及与轴线Ox垂直的直线$x=a$和$x=b$所围的曲边梯形的面积S.(图9)

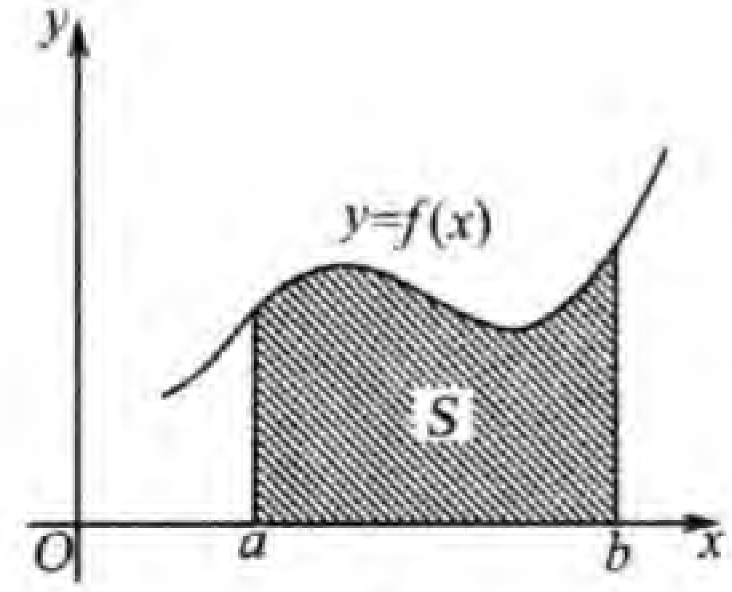


图 9

2. **分部积分公式** 若$f(x),g(x)\in C^{(1)}[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

3. **变量代换** 若

(1) 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$是连续的;

(2) 函数 $\varphi(t)$ 与其导数 $\varphi'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$是连续的,这里 $a=\varphi(\alpha)$,$b=\varphi(\beta)$;

(3) 复合函数 $f(\varphi(t))$ 在$[\alpha,\beta]$有定义且是连续的,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

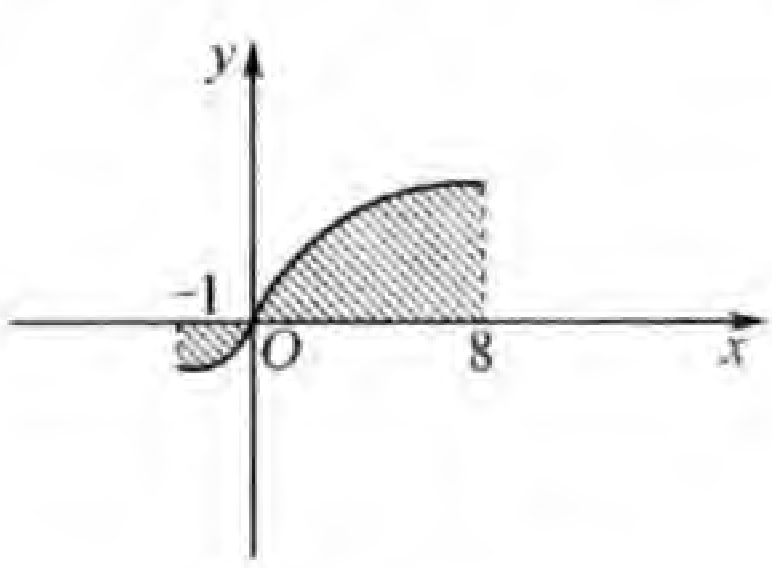
运用牛顿—莱布尼茨公式,求下列定积分并画出相应的曲边梯形面积(2206 ~ 2215).

【2206】 $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$.

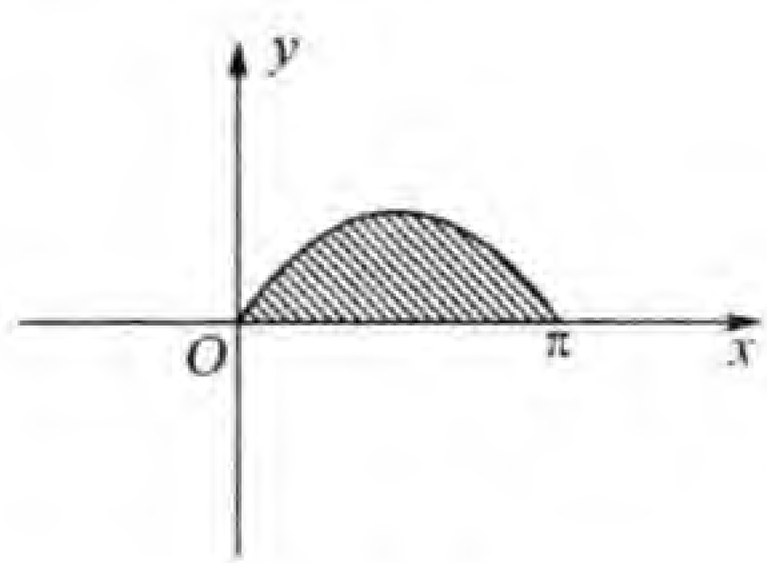
解 $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8}=11\frac{1}{4}$.

【2207】 $\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi=2$.



2206 题图



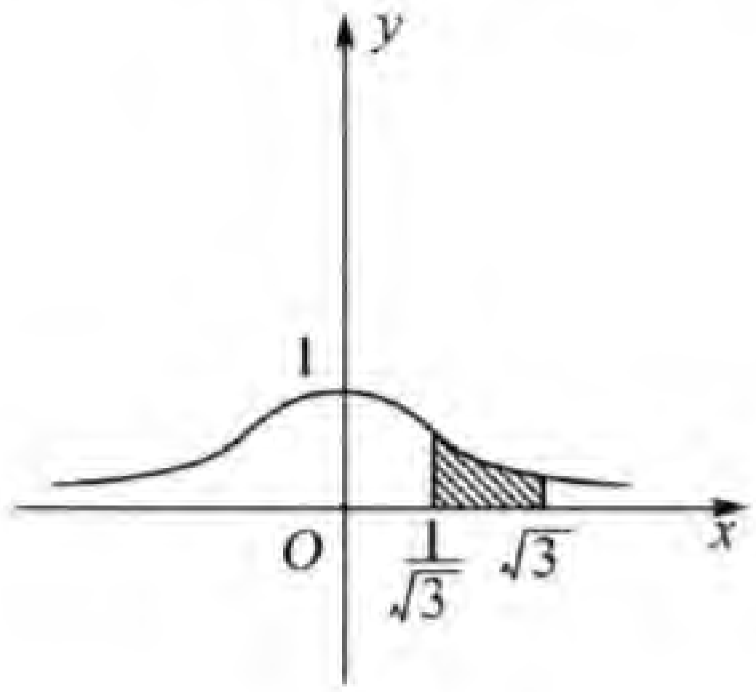
2207 题图

【2208】 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

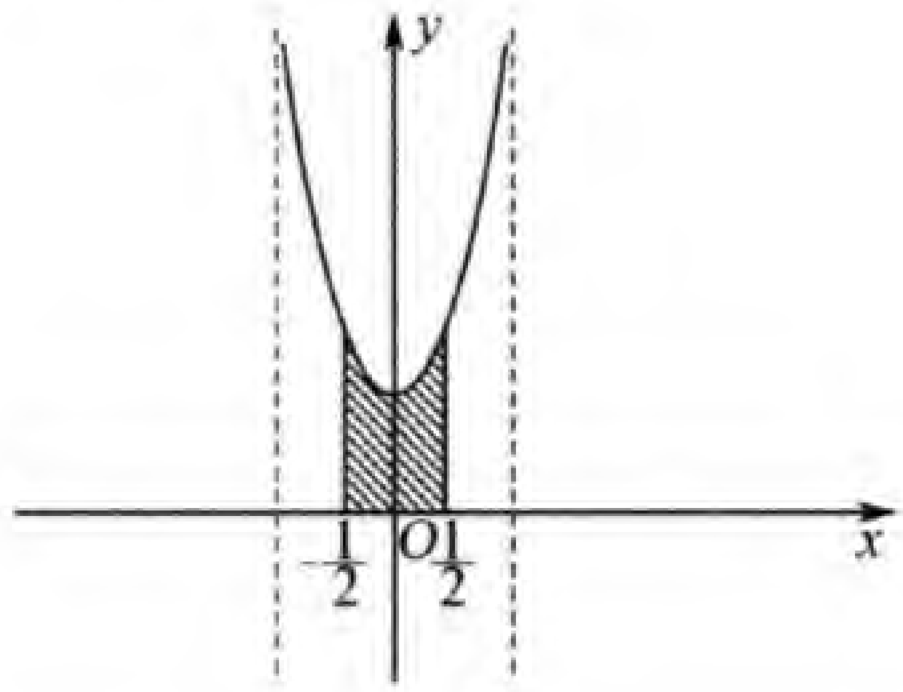
解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

【2209】 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}.$



2208 题图



2209 题图

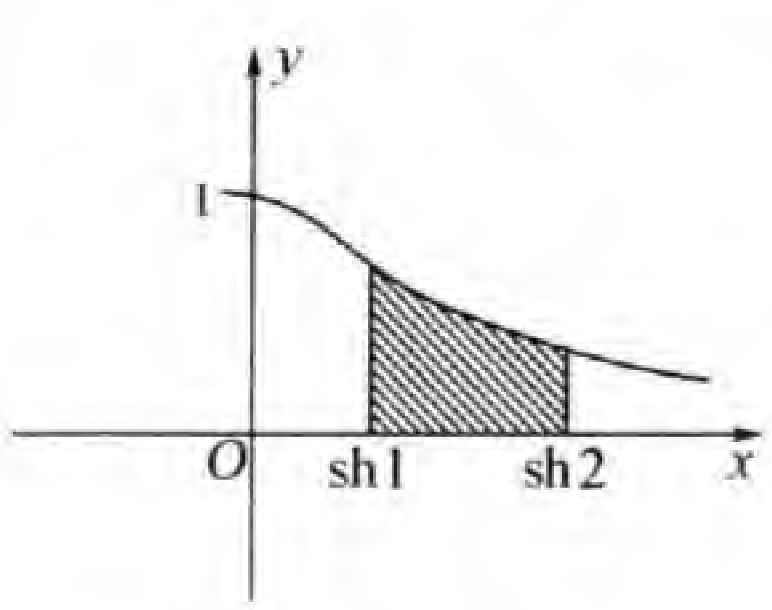
【2210】 $\int_{\mathrm{sh}1}^{\mathrm{sh}2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$

解 $\int_{\mathrm{sh}1}^{\mathrm{sh}2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Big|_{\mathrm{sh}1}^{\mathrm{sh}2}$

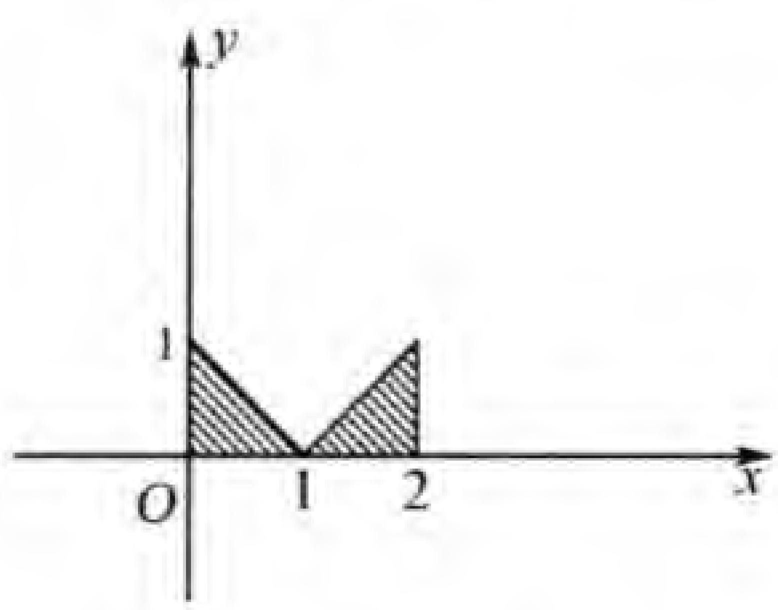
$$= \operatorname{arcsh} x \Big|_{\mathrm{sh}1}^{\mathrm{sh}2} = 1.$$

【2211】 $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = 1.$



2210 题图



2211 题图

【2212】 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1} \quad (0<\alpha<\pi).$

解 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\alpha+(x-\cos\alpha)^2}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\arctan\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)+\arctan\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

其中利用了 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

【2213】 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}\quad(0\leqslant\varepsilon<1)$.

解 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\pi}^{0}\frac{\mathrm{d}(2\pi-t)}{1+\varepsilon\cos(2\pi-t)}$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\mathrm{d}(\pi-t)}{1+\varepsilon\cos(\pi-t)}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1-\varepsilon\cos x}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1-\varepsilon^2\cos^2x}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(1-\varepsilon^2)\cos^2x+\sin^2x}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{(1-\varepsilon^2)+\tan^2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

【2214】 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$

$(|a|<1,|b|<1,ab>0)$.

解 由 1850 题的结果,我们有公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left|Ax+\frac{B}{2}+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right|+D,$$

这里 $A>0$,设

$$Ax^2+Bx+C=(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2),$$

这里 $A=4ab>0$,

两端求导数得

$$Ax+\frac{B}{2}=-a(1-2bx+b^2)-b(1-2ax+a^2).$$

因此 $$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4ab}}\ln|-a(1-2bx+b^2)-b(1-2ax+a^2)$$

$$+\sqrt{4ab}\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

【2215】 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$ $(ab\neq 0)$.

解 $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{a^2\tan^2x+b^2}$$

$$=\frac{1}{|ab|}\arctan\left(\frac{|a|\tan x}{|b|}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2|ab|}.$$

【2216】 若

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; (2) $\int_{0}^{2\pi}\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{2+\tan^2x}$; (3) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

说明为什么形式上运用牛顿-莱布尼茨公式会得出不正确的结果.

解 (1) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2<0,$$

这显然不正确. 事实上 $\frac{1}{x^2}>0$, 若 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 存在, 则必有 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x>0$. 产生错误的原因是被积函数在 $[-1,1]$ 上有第二类间断点 $x=0$,故不能应用公式.

(2) 若应用公式得

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{0}^{2\pi}=0.$$

但 $\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}>0$,若积分存在,必为正. 原因在于原函数在 $[0,2\pi]$ 上有第一类间断点 $x=\frac{\pi}{2}$ 及 $x=\frac{3\pi}{2}$,故不能直接应用公式.

(3) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}>0.$$

但 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1+x^2}<0,$$

所以,积分若存在,必为负. 产生错误的原因是原函数 $\arctan\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 为第一类间断点,故不能直接运用公式.

【2217】 求解:$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x.$

解 显然被积函数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$ 在 $x=0$ 间断,但容易验证

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)=0,$$

故在 $x=0$ 是可去间断点. 若补充定义被积函数在 $x=0$ 的值为0,

则被积函数在$[-1,1]$连续，从而$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$存在. 原函数$\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$在$x=0$有间断点，故不能直接运用牛顿—莱布尼兹公式.

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to-0}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x+\lim_{\eta\to+0}\int_{\eta}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{-1}^{\varepsilon}+\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{\eta}^{1}=\frac{2}{3}.$$

【2218】 求$\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

解 $$\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=100\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=200\sqrt{2}.$$

用定积分求解下列和的极限(2219～2224).

【2219】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

解 根据积分的定义有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

【2220】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2.$$

【2221】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2^2}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

【2222】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{i\pi}{n}$$

$$= \int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

【2223】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 x^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}.$$

【2224】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

求出下列极限(2225 ～ 2226).

【2225】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{1}\ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+\infty}x(\ln-1)\Big|_{\varepsilon}^{1}=-1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{-1}$.

【2226】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$

$$=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

抛开均匀的高阶无穷小,求出下列和的极限(2227 ～ 2230).

【2227】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots\right.$

$$\left.+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right].$$

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$,所以

$$x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+O(x^4),$$

从而当 n 充分大,且 $k<n$ 时

$$0\leqslant\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{1}{6}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3+O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

所以
$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left[\frac{1}{6}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$
$$\leqslant\frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)=0,$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}$$
$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$
$$=\pi\int_0^1(x+x^2)\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{6}.$$

【2228】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

解 由于 $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}(1+\alpha_n)$,

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

【2229】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\quad(x>0).$

解 因为

$$0\leqslant\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}-\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{\left(k+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)-\left(x+\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}+\left(x+\frac{k}{n}\right)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2x}\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

所以 $$0\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2xn^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4x}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\to 0\qquad(n\to\infty).$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(x+t)\mathrm{d}t=x+\frac{1}{2}.$$

【2230】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right].$

解 因为

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{1}{k}}=\frac{\frac{1}{k}}{n\left(n+\frac{1}{k}\right)}<\frac{1}{n^2},$$

所以 $$0<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$$

$$<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}<\frac{2}{n}\to 0\qquad(n\to\infty),$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{1}{k}}\cdot 2^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}.$$

【2231】 求出:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x=0$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_b^a \sin x^2\mathrm{d}x=-\sin a^2$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x=\sin b^2$.

【2232】 求出:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

解 (1) 设 $u=x^2$,则由复合函数的求导法则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\int_0^{u}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$=2x\sqrt{1+x^4};$$

(2) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}}$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}\right)\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x}$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}\left(\int_0^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)$$

$$=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};$$

(3) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\cos x)}\left(\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sin x)}\left(\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)$$

$$=-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$$

$$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$$

【2233】 求出:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}\cos x^2\,\mathrm{d}x}{x}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x}(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}\,dx}$.

解 应用洛必达法则有

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2\,dx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x^2=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\dfrac{\pi^2}{4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}\,dx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\cdot\int_0^x e^{x^2}\,dx}{e^{2x^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{x^2}\,dx}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

【2233.1】 设 $f(x)\in C[0,+\infty]$ 且当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to A$，求出：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx$.

解 令 $t=nx$，

则有 $x=\dfrac{t}{n},dx=\dfrac{1}{n}dt$，

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^n f(t)\,dt}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A.$

【2234】 证明：当 $x\to\infty$ 时，

$$\int_0^x e^{x^2}\,dx\sim\frac{1}{2x}e^{x^2}.$$

证 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x e^{x^2}\,dx}{\dfrac{1}{2x}e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{\left(1-\dfrac{1}{2x^2}\right)e^{x^2}}=1$，

所以当 $x\to\infty$ 时 $\int_0^x e^{x^2}dx\sim\frac{1}{2x}e^{x^2}$.

【2235】 求 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}dx}$.

解 $$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}dx}=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}\cdot\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}\cdot\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\tan x}\cdot\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}}\cos^3 x\right)=1.$$

【2236】 令 $f(x)$ 为正值连续函数,证明:当 $x\geqslant 0$ 时函数

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$ 逐渐递增.

证 $$\lim_{x\to+0}\varphi(x)=\lim_{x\to+0}\frac{xf(x)}{f(x)}=0,$$

故规定 $\varphi(0)=0$,则 $\varphi(x)$ 是 $x\geqslant 0$ 上的连续函数. 又当 $x>0$ 时,

$$\varphi'(x)$$
$$=\frac{1}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\left\{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt\right\}$$

$$=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\int_0^x(x-t)f(t)dt>0,$$

所以当 $x\geqslant 0$ 时,$\varphi(x)$ 是增加的.

【2237】 求解:(1) $\int_0^2 f(x)dx$,设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 2-x, & \text{当 } 1<x\leqslant 2 \text{ 时}.\end{cases}$$

(2) $\int_0^1 f(x)dx$,设

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant t \text{ 时}, \\ t\cdot\dfrac{1-x}{1-t}, & \text{当 } t\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

解 (1) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

(2) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t x\mathrm{d}x+\int_t^1 t\cdot\frac{1-x}{1-t}\mathrm{d}x=\frac{t}{2}.$

【2238】 计算下列积分并把它们看作参数 α 的函数，绘制积分 $I=I(\alpha)$ 的图形. 若

(1) $I=\int_0^1 x\mid x-\alpha\mid \mathrm{d}x$;

(2) $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\mathrm{d}x$;

(3) $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$.

解 (1) 分三种情况讨论

① 当 $\alpha<0$ 时 $I=\int_0^1 x(x-\alpha)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}$;

② 当 $\alpha>1$ 时 $I=\int_0^1 x(\alpha-x)\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}$;

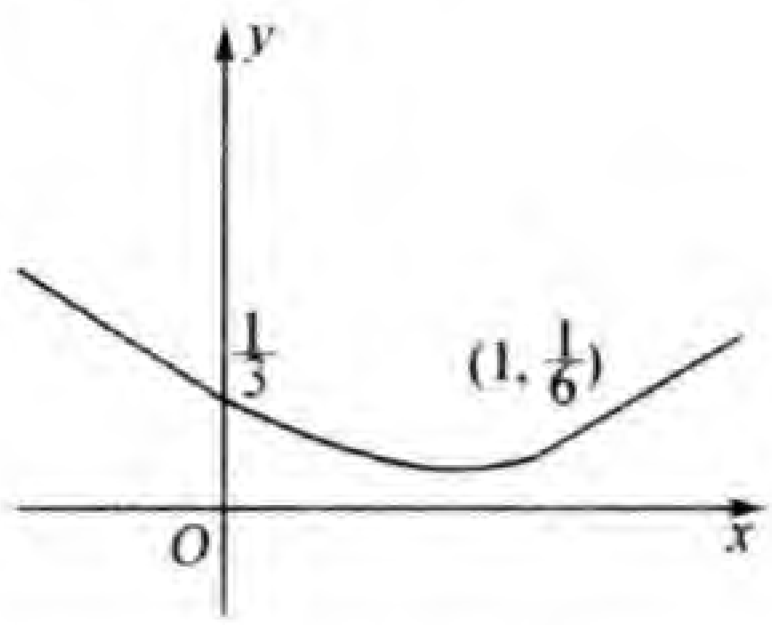
③ 当 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时

$$I=\int_0^{\alpha}x(\alpha-x)\mathrm{d}x+\int_{\alpha}^1 x(x-\alpha)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}.$$

因此 $$\int_0^1 x\mid x-\alpha\mid\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{\alpha}{2}, & \text{当 } \alpha<0 \text{ 时}, \\ \dfrac{\alpha^3}{3}-\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{3}, & \text{当 } 0\leqslant\alpha\leqslant 1 \text{ 时}, \\ \dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{3}, & \text{当 } \alpha>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

$I(\alpha)$ 的图形如 2238 题图 1



2238 题图 1

(2) 分两种情况讨论

① 若 $|\alpha|\leqslant 1$,则

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^{\pi}\frac{4\alpha^2(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^{\pi}\frac{[(1+\alpha)^2-4\alpha^2\cos^2 x]+[4\alpha^2-(1+\alpha^2)^2]}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^{\pi}[(1+\alpha^2)-2\alpha\cos x]\mathrm{d}x$$

$$-\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}.$$

由 2028 题的结果有

$$\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}$$

$$=\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2(1+\alpha^2)}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\cos x}$$

$$=\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2(1+\alpha^2)}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{(1-\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}.$$

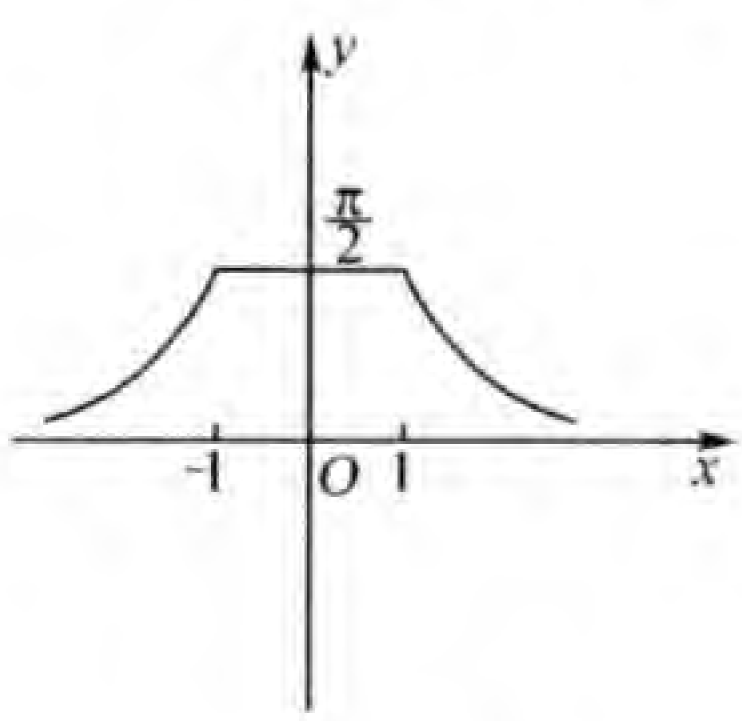
而
$$\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi[(1+\alpha^2)-2\alpha\cos x]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4\alpha^2}[(1+\alpha^2)x-2\alpha\sin x]\Big|_0^\pi$$
$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2},$$

因此
$$I=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(1-\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2}.$$

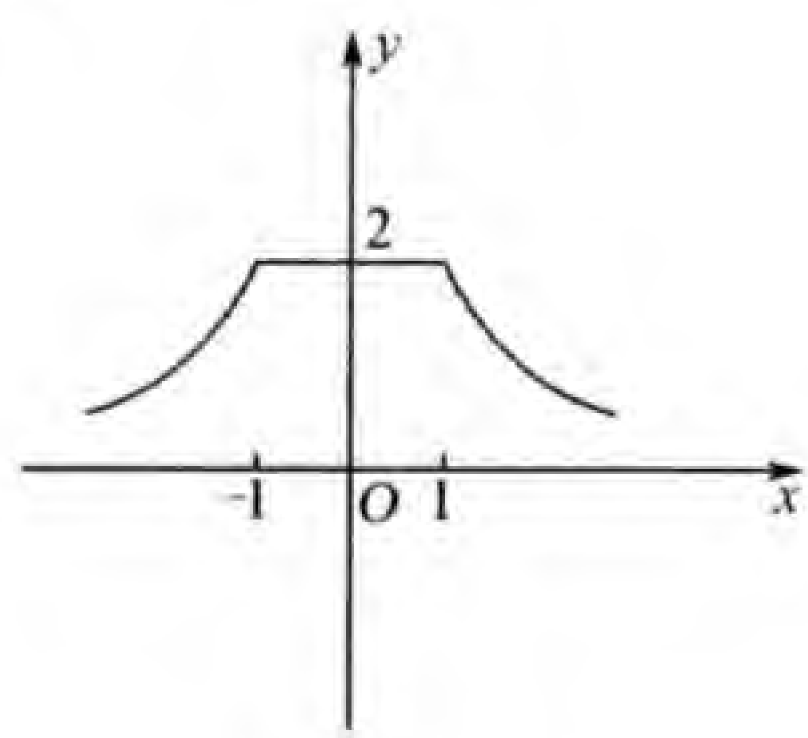
② 若 $|\alpha|>1$ 和前面同样的讨论并利用 2028 题的结果有
$$I=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}\cdot\frac{2}{\alpha^2-1}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi$$
$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha^2},$$

因此
$$\int_0^\pi\frac{\sin^2x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & 当\ |\alpha|\leqslant 1\ 时,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & 当\ |\alpha|>1\ 时.\end{cases}$$

$I(\alpha)$ 的图形如 2238 题图 2 所示.



2238 题图 2



2238 题图 3

(3) $$I=\int_0^\pi\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$$
$$=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases}2, & \text{当} \mid \alpha \mid \leqslant 1 \text{时},\\ \dfrac{2}{\mid \alpha \mid}, & \text{当} \mid \alpha \mid > 2 \text{时}.\end{cases}$$

$I(\alpha)$ 的图形如 2238 题图 3 所示.

运用分部积分公式,求出下列定积分(2239 ~ 2244).

【2239】 $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\ln 2} x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$

$$=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 2-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

【2240】 $\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi} x\mathrm{d}(\cos x)$

$$=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=\pi.$$

【2241】 $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x= x^2\sin x\Big|_0^{2\pi}-2\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$

$$=2x\cos x\Big|_0^{2\pi}-2\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=4\pi-2\sin x\Big|_0^{2\pi}=4\pi.$$

【2242】 $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \mid \ln x \mid \mathrm{d}x$.

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx+\int_{1}^{e}\ln x dx$

$$=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx+x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}dx$$

$$=-\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}+e-(e-1)=2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

【2243】 $\int_{0}^{1}\arccos x dx.$

解 $\int_{0}^{1}\arccos x dx$

$$=x\arccos x\Big|_{0}^{1}+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{1-x^2}\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=1.$$

【2244】 $\int_{0}^{\sqrt{3}}x\arctan x dx.$

解 $\int_{0}^{\sqrt{3}}x\arctan x dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_{0}^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{3}{2}\arctan\sqrt{3}-\frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_{0}^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\arctan\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt{3}$$

$$=2\arctan\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

运用适当的变量代换,求出下列定积分(2245 ~ 2249).

【2245】 $\int_{-1}^{1}\frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$

解 设$\sqrt{5-4x}=t$,

则 $x = \dfrac{5-t^2}{4}$,

$$\mathrm{d}x = -\frac{t}{2}\mathrm{d}t,$$

当 $x=-1$ 时，$t=3$

当 $x=1$ 时，$t=1$

所以 $$\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} = -\int_{3}^{1}\frac{5-t^2}{8}\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$$

【2246】 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4\pi}{16}.$$

【2247】 $\int_0^{0.75}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 设 $t=\dfrac{1}{x+1}$，则

$$x=\frac{1}{t}-1,\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,\ \text{且}$$

当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=0.75$ 时，$t=\dfrac{4}{7}$.

$$\int_0^{0.75}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(2t-1+\sqrt{2t^2-2t+1}\right)\Bigg|_{\frac{4}{7}}^{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1}{7}+\sqrt{\frac{25}{49}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7}{3}.$$

【2248】 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

解 设$\sqrt{e^x-1}=t$,

则 $x=\ln(t^2+1)$,

$$dx=\frac{2t}{t^2+1},$$

所以 $$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=2\int_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t^2}=2(t-\arctan t)\Big|_0^1$$

$$=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}.$$

【2249】 $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

解 令 $t=\arcsin\sqrt{x}$,

则 $x=\sin^2 t$,

所以 $$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\cdot 2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\,dt$$

$$=t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

【2250】 假定 $x-\frac{1}{x}=t$,计算积分$\int_{-1}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$.

解 $$\int_{-1}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx=2\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$$

$$=2\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$$

$$\xlongequal{\text{令 } x-\frac{1}{x}=t}2\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}}^0\frac{dt}{t^2+2}$$

$$=2\lim_{R\to-\infty}\int_R^0\frac{dt}{t^2+2}$$

$$=\lim_{R\to-\infty}\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_R^0=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

【2251】 设

(1) $\int_{-1}^{1} dx$, $\quad t = x^{\frac{2}{3}}$;

(2) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, $\quad x = \frac{1}{t}$;

(3) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, $\quad \tan x = t$.

说明为什么形式上的代换 $x = \varphi(t)$ 会导致不正确的结果.

解 (1) $\int_{-1}^{1} dx = 2$,但如果作代换 $t = x^{\frac{2}{3}}$,则有

$$\int_{-1}^{1} dx = \pm \frac{3}{2}\int_{1}^{1} t^{\frac{1}{2}} dt = 0,$$

其错误在于代换 $t = x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x = \pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的.

(2) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$,

但若作代换 $x = \frac{1}{t}$,则有

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 0,$$

其错误在于代换 $x = \frac{1}{t}$ 在 $t = 0 (\in [-1,1])$ 处不连续.

(3) 显然 $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} > 0$,但若作代换 $t = \tan x$,则得

$$\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) \Big|_{0}^{\pi} = 0,$$

其错误在于代换 $t = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处不连续.

【2252】 在积分 $\int_{0}^{3} x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ 中能否假定 $x = \sin t$?

解 不可以,因为 $\sin t$ 不可能大于 1.

【2253】 在积分$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$中,当变量代换$x=\sin t$时,能否取数$\pi$和$\frac{\pi}{2}$作为新的极限?

解 可以,因为代换满足换元的条件.事实上

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\mathrm{d}t=-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=-\left(\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right)\Big|_\pi^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

【2254】 证明:若$f(x)$在区间$[a,b]$是连续的,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\mathrm{d}x.$$

证 设$x=a+(b-a)t$,

则 $\mathrm{d}x=(b-a)\mathrm{d}t.$

代入得 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(a+(b-a)t)(b-a)\mathrm{d}t$$

$$=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\mathrm{d}t,$$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\mathrm{d}x.$$

【2255】 证明等式:

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x \quad (a>0).$$

证 设$x=\sqrt{t}$,

则 $$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\mathrm{d}t,$$

即 $$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x.$$

【2256】 设 $f(x)$ 在区间 $[A,B]\supset[a,b]$ 上连续，当 $[a+x,b+x]\subset[A,B]$ 时，求出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y$.

解 令 $t=x+y$，

则 $$\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y=\int_{a+x}^{b+x}f(t)\mathrm{d}t,$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a+x}^{b+x}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=f(b+x)-f(a+x).$$

【2257】 证明：若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是连续的，则

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

证 (1) 设 $x=\frac{\pi}{2}-t$，

则 $$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t.$$

所以 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{1}f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\mathrm{d}t,$$

即 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $x=\pi-t$，

则 $$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t.$$

所以 $$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$
$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t.$$

因此 $$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

【2258】 证明:若函数 $f(x)$ 在区间$[-l,l]$连续,则:

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数时,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{l} f(x)\mathrm{d}x,$$

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数时,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

给出这些事实的几何解释.

证 (1) 因为 $f(x)$ 为偶函数,即 $f(-x) = f(x)$.

令 $x = -t$,则

$$\int_{-l}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{l}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{l} f(t)\mathrm{d}t$$

所以 $$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{l} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-l}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{l} f(x)\mathrm{d}x.$$

其几何解释为:由于 $f(x)$ 为偶函数,故图形关于 Oy 轴对称. 于是由曲线 $y = f(x)$,直线 $x = -l$ 及 $x = l$ 所围图形的面积为曲线 $y = f(x)$,直线 $x = 0$ 及 $x = l$ 所围图形的面积的两倍. 如 2258 题图 1 所示.

(2) 由于 $f(-x) = -f(x)$,设

$x = -t$. 则

$$\int_{-l}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{l}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{l} f(t)\mathrm{d}t,$$

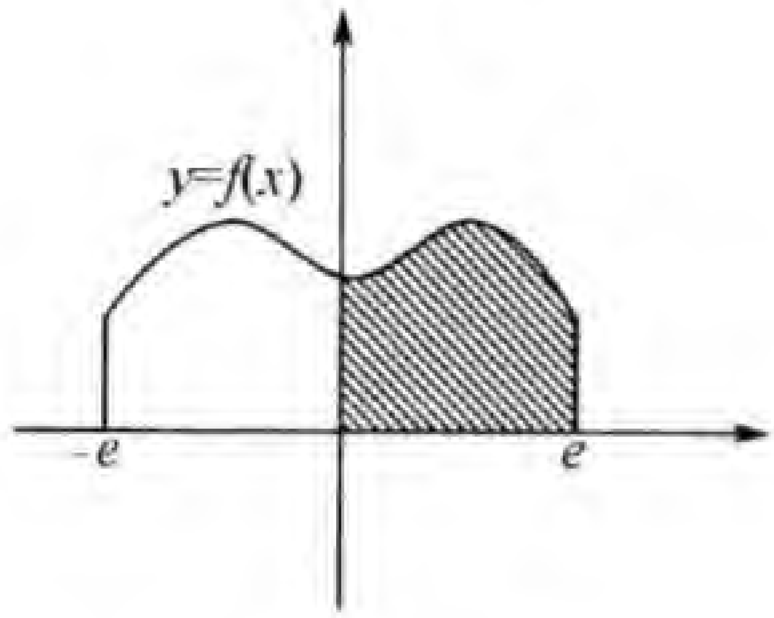
所以

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{l} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-l}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{0}^{l} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

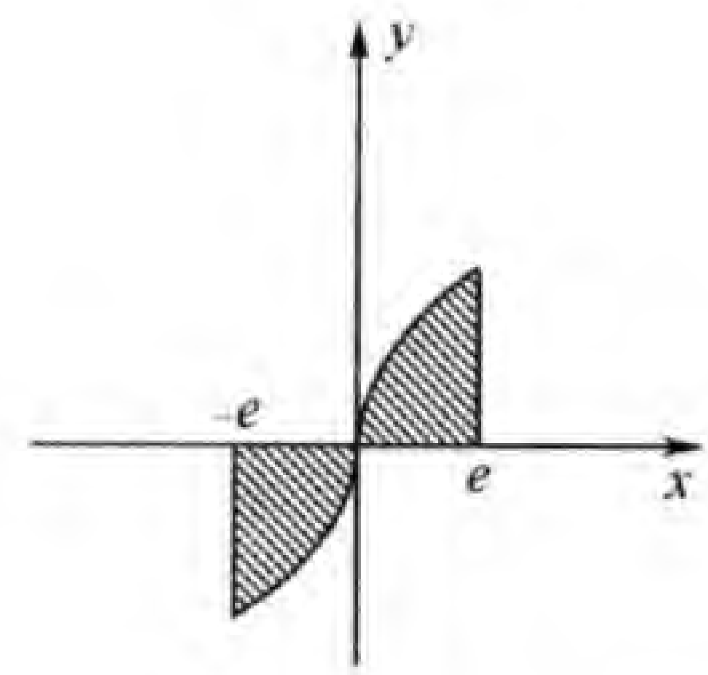
其几何解释为:由于 $f(x)$ 为奇函数,故图形关于原点对称. 于是由 $y = f(x)$,$y = 0$ 及 $x = -l$ 所围成之面积,与由 $y = f(x)$,$y = 0$ 及 $x = l$ 所围成之面积绝对值相等,符号相反,故其面积的代数

和为零.

如 2258 题图 2 所示.



2258 题图 1



2258 题图 2

【2259】 证明:偶函数的原函数中有一个是奇函数,而奇函数的一切原函数都是偶函数.

证 因为 $f(x)$ 的全体原函数为

$$F_c(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C,$$

其中 C 为任意常数. 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,所以

$$\begin{aligned}F_0(-x)&=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\\&\xlongequal{令 u=-t}-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u\\&=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F_0(x),\end{aligned}$$

即 $F_0(x)$ 是奇数. 但当 $C\neq 0$ 时 $F_C(x)=F_0(x)+C$ 不是奇函数.

事实上

$$\begin{aligned}F_C(-x)&=F_0(-x)+C=-F_0(x)+C\\&=-(F_0(x)+C)+2C=-F_c(x)+2C\\&\neq -F_C(x),\end{aligned}$$

若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,所以

$$F_C(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C$$

$$=-\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F_C(x),$$

即一切原函数都是偶函数.

【2260】 引入新变量 $t=x+\frac{1}{x}$ 来计算积分:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$$

解 设 $t=x+\frac{1}{x}$,则

$$t^2-4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2.$$

于是,当 $x>1$ 时,$x=\frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2-4})$;

当 $0<x<1$ 时,$x=\frac{1}{2}(t-\sqrt{t^2-4})$.

所以 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^2\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}(1+\sqrt{t^2-4})e^t\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2-4})\right]$$

$$+\int_{\frac{5}{2}}^{2}(1-\sqrt{t^2-4})e^t\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(t-\sqrt{t^2-4})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}(1+\sqrt{t^2-4})e^t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}(1-\sqrt{t^2-4})e^t\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}e^t\left[\sqrt{t^2-4}+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}e^t\sqrt{t^2-4}\mathrm{d}t+\int_2^{\frac{5}{2}}e^t\mathrm{d}(\sqrt{t^2-4})$$

$$=\sqrt{t^2-4}e^t\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

【2261】 在积分$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$中进行变量代换 $\sin x = t$.

解 $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x,$$

在$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$中设 $x = \pi - u$,

则
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - u)\cos u\mathrm{d}u = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x)\cos x\mathrm{d}x.$$

在$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x$中令 $x = \pi - u$,

则
$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(\pi - u)\cos u\mathrm{d}u = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - x)\cos x\mathrm{d}x.$$

同样
$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi + x)\cos x\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - f(\pi - x))\cos x\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (f(2\pi + x) - f(\pi - x))\cos x\mathrm{d}x.$$

令 $t = \sin x$,

则 $x = \arcsin t$,

$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,

因此 $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\mathrm{d}t.$$

【2262】 计算积分：$\int_{e^{-2n\pi}}^1 \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x$，其中 n 为自然数.

证 $\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]' = \dfrac{\sin(-\ln x)}{x}.$

设 $x = \mathrm{e}^{-t}$，则

$$\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \frac{\sin(-\ln x)}{x} = \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{-t}},$$

所以 $\int_{e^{-2n\pi}}^1 \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x = \int_0^{2n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$

$$= \sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{2n}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t = 4n.$$

【2263】 求出 $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

解 设 $x = \pi - t$，

则 $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^0 \dfrac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t,$$

所以 $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{2}(-\arctan\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

【2264】 若 $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，

求积分 $\int_{-1}^3 \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x.$

解 $\int_{-1}^3 \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\arctan(f(x))\Big|_{-1}^{0}+\arctan(f(x))\Big|_{0}^{2}+\arctan(f(x))\Big|_{2}^{3}$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)+\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\arctan\frac{4^2\cdot 2}{3^3\cdot 1}-\frac{\pi}{2}$$

$$=\arctan\frac{32}{27}-2\pi.$$

【2265】 证明：若 $f(x)$ 为定义在 $-\infty<x<+\infty$ 的连续周期函数，且具有周期 T，则

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\text{，其中 }a\text{ 为任意数.}$$

证 $\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $x-T=u$，

则 $\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(u+T)\mathrm{d}u=\int_0^a f(u)\mathrm{d}u$，

从而 $\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=0.$

因此 $\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$

【2266】 证明：当 n 为奇函数时，

$$F(x)=\int_0^x\sin^n x\,\mathrm{d}x\text{ 及 }G(x)=\int_0^x\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

是以 2π 为周期的周期函数，而当 n 为偶数时，这些函数中的每一个函数都是线性函数与周期函数的和.

证 当 n 为奇数时，$\sin^n x$ 是奇函数，而且是以 2π 为周期的函数，所以

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{x+2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x \, dx + \int_0^x \sin^n x \, dx$$

$$= 0 + \int_0^x \sin^n x \, dx = F(x),$$

$$G(x + 2\pi) = \int_0^{x+2\pi} \cos^n x \, dx$$

$$= \int_0^x \cos^n x \, dx + \int_x^{x+2\pi} \cos^n x \, dx$$

$$= G(x) + \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx$$

$$= G(x) + \int_0^{\pi} \cos^n x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^n x \, dx$$

$$= G(x) + \int_0^{\pi} \cos^n x \, dx + \int_0^{\pi} \cos^n (x + \pi) \, dx$$

$$= G(x).$$

即 $F(x)$,$G(x)$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

当 n 为偶数时,有

$$F(x + 2\pi) = F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n x \, dx,$$

$$G(x + 2\pi) = G(x) + \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx,$$

而 $$\int_0^{2\pi} \sin^n x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx = a > 0,$$

所以 $F(x)$,$G(x)$ 都不是以 2π 为周期的周期函数,设

$$F_1(x) = F(x) - \frac{a}{2\pi} x,$$

则 $$F_1(x + 2\pi) = F(x + 2\pi) - \frac{a}{2\pi}(x + 2\pi)$$

$$= F(x) + a - \frac{a}{2\pi} x - a$$

$$= F(x) - \frac{a}{2\pi} x = F_1(x),$$

即 $F_1(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数.

同样 $G_1(x) = G(x) - \frac{a}{2\pi}x$ 是以 2π 为周期的周期函数，因此

$$F(x) = F_1(x) + \frac{a}{2\pi}x,$$

$$G(x) = G_1(x) + \frac{a}{2\pi}x.$$

【2267】 证明：函数

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x,$$

（其中 $f(x)$ 为以 T 为周期的连续周期函数）在一般情况下，是线性函数与 T 周期的周期函数之和.

证 $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x,$

则 $$F(x+T) - F(x) = \int_{x}^{x+T} f(x)\mathrm{d}x,$$

而 $f(x)$ 是一周期为 T 的连续周期函数. 故

$$\int_{x}^{x+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\mathrm{d}x = a(\text{常数}).$$

若 $a = 0$，则 $F(x)$ 为一周期函数.

若 $a \neq 0$，设 $F_1(x) = F(x) - \frac{a}{T}x$，则

$$F_1(x+T) = F(x+T) - \frac{a}{T}(x+T)$$

$$= F(x) + a - \frac{a}{T}x - a$$

$$= F(x) - \frac{a}{T}x = F_1(x),$$

即 $F_1(x)$ 为周期函数，所以 $F(x) = F_1(x) + \frac{a}{T}x$.

计算下列积分（2268 ～ 2280）.

【2268】 $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\mathrm{d}x = -\frac{1}{26}(2-x^2)^{13}\Big|_0^1 = 315\,\frac{1}{26}$

【2269】 $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{2}\ln3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

【2270】 $\int_{1}^{e}(x\ln x)^2\mathrm{d}x$.

解 $\int_{1}^{e}(x\ln x)^2\mathrm{d}x$

$=x^3\ln^2x\Big|_{1}^{e}-2\int_{1}^{e}x^2\ln x\cdot(\ln x+1)\mathrm{d}x$

$=e^3-2\int_{1}^{e}x^2\ln^2x\mathrm{d}x-2\int_{1}^{e}x^2\ln x\mathrm{d}x$,

所以 $\int_{1}^{e}(x\ln x)^2\mathrm{d}x=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_{1}^{e}x^2\ln x\mathrm{d}x$

$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_{1}^{e}+\frac{2}{9}\int_{1}^{e}x^2\mathrm{d}x$

$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{9}e^3+\frac{2}{27}x^3\Big|_{1}^{e}$

$=\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$.

【2271】 $\int_{1}^{9}x\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sqrt[3]{1-x}=t$,

则 $x=1-t^3,\mathrm{d}x=-3t^2\mathrm{d}t$,

所以 $\int_{1}^{9}x\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x=-3\int_{0}^{-2}(t^3-t^6)\mathrm{d}t$

$$= \left(-\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{7}t^7\right)\Big|_0^{-2} = -66\frac{6}{7}.$$

【2272】 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $\sqrt{x^2-1} = t$,

则 $x^2 = t^2 + 1$,

$x dx = t dt$,

所以 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\sqrt{3}}^{0} \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t\Big|_{\sqrt{3}}^{0} = -\frac{\pi}{3}$.

【2273】 $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$.

解 设 $1 + 3x^8 = t$,

则 $24x^7 dx = dt$,

$x^8 = \frac{1}{3}(t-1)$,

所以 $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx = \frac{1}{72}\int_1^4 (t-1)t^{\frac{1}{2}}dt$

$$= \frac{1}{72}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4 = \frac{29}{270}.$$

【2274】 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$.

解 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{2(1+x)}.$$

令 $\sqrt{x} = t$,

则 $x = t^2, dx = 2tdt$,

所以 $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{2(1+x)} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}dt$

$$= (t - \arctan t)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3},$$

故 $$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x = \pi - \left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

【2275】 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

解 $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} - \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$$
$$= \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} + \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2-\cos x} - \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} - \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{3-\cos x}$$
$$= 4\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{4-\cos^2 x} - 6\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{9-\cos^2 x}$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{4\sin^2 x+3\cos^2 x} - 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{9\sin^2 x+8\cos^2 x}$$
$$= 8\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - 12\cdot\frac{1}{3\sqrt{8}}\arctan\frac{3\tan x}{\sqrt{8}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

【2276】 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 由 2035 题的结果有
$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4+\cos^4 x} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4+\cos^4 x}$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4+\cos^4 x} = 8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 2\sqrt{2}\pi.$$

【2277】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x$.

解 $$\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\sin 2x$$
$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}(\sin 6x - \sin 2x),$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$

$$= \left(-\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$$

【2278】 $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2 dx$.

解 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1-\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}x\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

【2279】 $\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x dx$.

解 利用 1828 题的结果可得

$$\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int e^x dx + \frac{1}{2}\int e^x\cos 2x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^x + \frac{e^x}{10}(\cos 2x + 2\sin 2x)\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{5}(e^{\pi}-1).$$

【2280】 $\int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^4 x dx$.

解 $\int_0^{\ln 2}\mathrm{sh}^4 x dx = \int_0^{\ln 2}\mathrm{sh}^2 x(\mathrm{ch}^2 x - 1)dx$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\ln 2}\mathrm{sh}^2 2x dx - \int_0^{\ln 2}\mathrm{sh}^2 x dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\ln 2}(\mathrm{ch}4x - 1)dx - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(\mathrm{ch}2x - 1)dx$$

$$= \left(\frac{1}{32}\mathrm{sh}4x - \frac{x}{8}\right)\Bigg|_0^{\ln 2} - \left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x - \frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{225}{1024}.$$

用递推公式计算依赖于参数 n(用正整数值) 的积分(2281 ~2287).

【2281】 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$

解 $I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d(\cos x)$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,$$

所以 $$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

利用上面的递推公式可得

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & 若\ n = 2k, \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & 若\ n = 2k+1. \end{cases}$$

【2282】 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$

解 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$,

则 $$dx = -dt,$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t,$$

所以 $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt.$$

因此,结果与 2281 题的结果相同.

【2283】 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\,dx.$

解 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x \mathrm{d}(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

由于 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$,

因此,可得

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-3} - I_{n-2}\right)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - \cdots + (-1)^n I_0$$

$$= (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right].$$

【2284】 $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x.$

解　设 $x = \sin t$,并利用 2282 题的结论有

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$= 2^{2n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

【2285】 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解　设 $x = \sin t$,并利用 2281 题的结论有

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \dfrac{\pi}{2}, & \text{若 } n = 2k, \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{若 } n = 2k+1. \end{cases}$$

【2286】 $I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n \mathrm{d}x.$

解　$I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} \mathrm{d}x$$

$$=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}.$$

而 $$I_0=\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1},$$

所以 $$I_n=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}$$

$$=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+1}\right)I_{n-2}$$

$$=\cdots$$

$$=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+1}\right)I_0$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

【2287】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}\mathrm{d}x.$

解 $$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sec^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)-I_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}.$$

所以 $$I_n=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n-2)}+\cdots$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}+(-1)^nI_0.$$

而 $$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\ln\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此 $$I_n=(-1)^n\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)\right].$$

若 $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ 是实变量 x 的复函数，这里

$$f_1(x)=\mathrm{Re}f(x),\qquad f_2(x)=\mathrm{Im}f(x)$$

及 $i^2=-1$. 则根据定义假定：

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x+i\int f_2(x)\mathrm{d}x$$

显然 $$\mathrm{Re}\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{Re}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Im}\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{Im}f(x)\mathrm{d}x.$$

【2288】 利用欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，证明

$$\int_0^{2\pi}e^{inx}e^{-imx}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & 若\ m\neq n,\\ 2\pi, & 若\ m=n.\end{cases}$$

(n 及 m 为整数).

证 当 $m=n$ 时

$$\int_0^{2\pi}e^{inx}e^{-inx}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(\cos^2 nx+\sin^2 nx)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x=2\pi,$$

当 $m\neq n$ 时

$$\int_0^{2\pi}e^{inx}e^{-imx}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos nx+i\sin nx)(\cos mx-i\sin mx)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos(n-m)x\mathrm{d}x+i\int_0^{2\pi}\sin(n-m)x\mathrm{d}x=0.$$

【2289】 证明：

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\mathrm{d}x=\frac{e^{b(\alpha+i\beta)}-e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}\qquad(\alpha\ 及\ \beta\ 为常数).$$

证 $$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\mathrm{d}x=\int_a^b e^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x+i\int_a^b e^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x + i(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)]}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_a^b$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\alpha - i\beta)(\cos\beta x + i\sin\beta x)}{(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)}\Bigg|_a^b$$

$$= \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta}\Bigg|_a^b = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

利用欧拉公式：

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

计算下列积分(n **及** m **为正整数**)(2290 ～ 2294).

【2290】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx.$

解 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x \cdot \cos^{2n}x\,dx$,

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx,$$

则 $I = \frac{1}{4}I_0$. 不妨设 $m \leqslant n$，利用欧拉公式有

$$I_0 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2m}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}\right)dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2m+2n}}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k e^{2(m-k)ix}\right)\left(\sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^l e^{2(n-l)ix}\right)dx$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l \int_0^{2\pi} e^{2(m+n-k-l)ix}\,dx.$$

而 $$\int_0^{2\pi} e^{2(m+n-k-l)ix}\,dx = \begin{cases} 2\pi & m+n-k-l=0, \\ 0 & m+n-k-l\neq 0, \end{cases}$$

所以 $I_0 = \frac{(-1)^m\pi}{2^{2m+2n-1}}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}$，而

$$(-1)^m\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!},$$

所以 $$I = \frac{1}{4}I_0 = \frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}.$$

【2291】 $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$.

解 $$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(e^{2ix})^n - 1}{e^{2ix} - 1} \cdot e^{-(n-1)ix} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-(n-1)ix} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2kix} dx.$$

若 n 为偶数,则对称于任何 $k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 有
$$\int_0^{2\pi} e^{-(n-1)ix} \cdot e^{2kix} dx = 0;$$

若 n 为奇数,设 $n = 2l+1$,

则当 $k = l$ 时,有
$$\int_0^{2\pi} e^{-(n-1)ix} \cdot e^{2kix} dx = \int_0^{2\pi} e^{-2lix} e^{2lix} dx = 2\pi;$$

而当 $k \neq l(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 时,有
$$\int_0^{2\pi} e^{-(n-1)ix} \cdot e^{2kix} dx = 0.$$

因此,当 n 为偶数时
$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = 0,$$

当 n 为奇数时
$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \pi.$$

【2292】 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx$.

解 $$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{e^{(2n+1)ix} + e^{-(2n+1)ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-2nix} \frac{(e^{2ix})^{2n+1}+1}{e^{2ix}+1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[e^{-2nix} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (e^{2ix})^{2n-k} \right] dx.$$

当 $k = n$ 时

$$\int_0^{2\pi} e^{-2nix} \cdot (e^{2ix})^{2n-k} dx = 2\pi;$$

当 $k \neq n$ 时

$$\int_0^{2\pi} e^{-2nix} \cdot (e^{2ix})^{2n-k} dx = 0,$$

故
$$I = \frac{1}{2}(-1)^n 2\pi = (-1)^n \pi.$$

【2293】 $\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx \, dx.$

解
$$\cos^n x \cos nx = \frac{1}{2^{n+1}} (e^{ix} + e^{-ix})^n (e^{inx} + e^{-inx})$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=-2n}^{2n} A_k e^{ikx}.$$

其实 A_k 为常数，$A_0 = 2$，

而
$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi & k = 0, \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

所以
$$I = \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^n x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{k=-2n}^{2n} \int_0^{2\pi} A_k e^{ikx} dx$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2^n}.$$

【2294】 $\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx \, dx.$

解
$$\sin^n x \sin nx = \frac{1}{(2i)^{n+1}} (e^{ix} - e^{-ix}) \cdot (e^{inx} - e^{-inx})$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \sum_{k=-2n}^{2n} B_k e^{ikx}$$

其中 B_k 为常数，$B_0 = -1 + (-1)^n$，而

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi & k = 0, \\ 0 & k \neq 0, \end{cases}$$

所以 $$\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^n x \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2i)^{n+1}} [-1 + (-1)^n] 2\pi$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ \frac{\pi}{2^n} (-1)^{\frac{n+1}{2}+1} & \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \end{cases}$$

而 $$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}+1} & \text{当 } n \text{ 为奇数时}. \end{cases}$$

因此 $$\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx = \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

求出下列积分(n 为自然数)(2295 ~ 2298).

【2295】 $\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1) x dx.$

解 $\sin^{n-1} x \cos(n+1) x$

$$= \frac{1}{2^n (i)^{n-1}} (e^{ix} - e^{-ix})^{n-1} (e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x})$$

$$= \frac{1}{2^n (i)^{n-1}} \sum_{k=-2n}^{2n} A_k e^{ikx}.$$

其中 $A_k(k = 0, \pm, \cdots, \pm 2n)$ 为常数

$$A_0 = 0,$$

而 $$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi & k = 0, \\ 0 & k \neq 0, \end{cases}$$

所以 $$\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1) x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1) x dx = 0.$$

【2296】 $\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x.$

解 $\cos^{n-1}x\sin(n+1)x$

$$=\frac{1}{2^n i}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})^{n-1}(\mathrm{e}^{i(n+1)x}-\mathrm{e}^{-i(n+1)x})$$

$$=\frac{1}{2^n i}\sum_{k=-2n}^{2n}B_k\mathrm{e}^{ikx},$$

其中 $B_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm2n)$ 为常数,

$$B_0=0,$$

而 $$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}x=\begin{cases}2\pi & k=0,\\0 & k\neq0,\end{cases}$$

所以 $$\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x=0.$$

【2297】 $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos^{2n}x\mathrm{d}x.$

解 因为

$$\cos^{2n}x=\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left[C_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\cos2(n-k)x\right],$$

所以 $$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos^{2n}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{C_{2n}^n\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos2(n-k)x\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}C_{2n}^n\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{2\pi}\right.$$

$$\left.+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\frac{(2n-2k)\sin2(n-k)x-a\cos2(n-k)x}{a^2+(2n-2k)^2}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{2\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}C_{2n}^n(\mathrm{e}^{-2\pi a}-1)-a(\mathrm{e}^{-2\pi a}-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2C_{2n}^k}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}$$

$$=\frac{1-e^{-2m\pi}}{2^{2n}\cdot a}\left\{C_{2n}^{n}+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^2C_{2n}^{k}}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}.$$

【2298】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx.$

解 利用分部积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2n}\sin 2nx\cdot\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx\cdot\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2n}\sin 2nx\cdot\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}dx$$

$$-\frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx.$$

而 $$\frac{1}{2n}\sin 2n\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{2n}\sin 2nx\ln\cos x-\lim_{x\to+0}\frac{1}{2n}\sin 2nx\ln\cos x$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{2n}\cdot\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}}-0=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x\cdot\sin^2 2nx}{\cos x\cdot\cos 2nx}$$

$$=\frac{1}{4n^2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x}{\cos 2nx}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin^2 2nx}{\cos x}$$

$$=\frac{(-1)^n}{4n^2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{4\sin 2nx\cdot\cos 2nx}{-\sin x}=0.$$

再利用 2292 题的结果有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$$

$$=(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}dx$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}.$$

因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cdot \cos 2nx\,dx$

$$= 0 + \frac{1}{4n}\left[(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2} - (-1)^n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{\pi}{4n}.$$

【2299】 运用多次分部积分法,计算欧拉积分:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx,$$

其中 m 及 n 为正整数.

解 $B(m,n)$

$$= \frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\,dx$$

$$= \frac{n-1}{m}B(m+1,n-1),$$

继续利用分部积分法,可得

$$B(m,n) = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\,dx$$

$$= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!}\cdot\frac{1}{m+n-1}x^{m+n-2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

【2300】 勒让德多项式 $P_n(x)$ 用下式定义

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n = 0,1,2\cdots).$$

证明:$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & 若\ m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & 若\ m = n. \end{cases}$

证 当 $m \neq n$ 时,不妨设 $n < m$,由于 $P_n(x)$,$P_m(x)$ 分别为 n,m 次多项式,则 $P_n^{(m)}(x) \equiv 0$. 记

$$R(x) = \frac{1}{2^m m!}(x^2-1)^m.$$

由于 $x = \pm 1$ 分别为 $R(x)$ 的 m 重零点. 所以

$$R^{(k)}(x)\Big|_{x=\pm1}=0 \qquad (k=0,1,\cdots,m-1),$$

多次利用分部积分法可得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x\\&=[P_n(x)R^{(m-1)}(x)-P'_n(x)R^{(m-2)}(x)+\cdots\\&\quad+(-1)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)R(x)]\Big|_{-1}^{1}\\&\quad+(-1)^m\int_{-1}^{1}R(x)P_n^{(m)}(x)\mathrm{d}x\\&=0.\end{aligned}$$

当 $m=n$ 时

$$P_n^{(n)}(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n=\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

同上面一样可得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\mathrm{d}x\\&=[P_n(x)R^{(n-1)}(x)-P'_n(x)R^{(n-2)}(x)+\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}P_n^{(n-1)}(x)R(x)]\Big|_{-1}^{1}\\&\quad+(-1)^n\int_{-1}^{1}R(x)P_n^{(n)}(x)\mathrm{d}x\\&=(-1)^n\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x\\&=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

设 $x=\sin t$，并利用 2282 题的结果有

$$\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

因此 $$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2}{2n+1}.$$

【2301】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间可积分，而 $F(x)$ 在 $[a,b]$

区间内除了有限个点 $C_i(i=1,2,\cdots,p)$ 及 a、b 点外有 $F'(x)=f(x)$，$F(x)$ 在这有限个点处有第一类间断点(广义原函数).
证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b-0)-F(a+0)$$
$$-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

证 不妨设 $a<c_1<c_2<\cdots<c_p<b$，并记 $c_0=a$，$c_{p+1}=b$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to+0}\sum_{i=0}^{p}\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta}f(x)\mathrm{d}x,$$

根据假设，在 $[c_i+\eta,c_{i+1}-\eta]$ 上 $F'(x)=f(x)$，从而可应用牛顿—莱布尼兹公式，可得

$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta}f(x)\mathrm{d}x=F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta),$$

因此 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to+0}\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta)]$$
$$=\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0)]$$
$$=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}(F(c_i+0)$$
$$-F(c_i-0)).$$

【2302】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间可积，且

$$F(x)=C+\int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

为 $f(x)$ 的不定积分. 证明：函数 $F(x)$ 是连续的，且在函数 $f(x)$ 的所有连续点处都有等式：

$$F'(x)=f(x),$$

那么，在函数 $f(x)$ 的不连续点处，函数 $F(x)$ 的导数如何？

研究例题：

(1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=1(n=\pm1,\pm2,\cdots)$，当 $x\neq\dfrac{1}{n}$ 时及 $f(x)=0$；

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$.

证 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故必有界. 所以存在 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

因此，对任何 $x\in[a,b]$ 得

$$\begin{aligned}&|F(x+\Delta x)-F(x)|\\&=\left|\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M|\Delta x|\to 0 \qquad (\text{当 }\Delta x\to 0\text{ 时}),\end{aligned}$$

即 $F(x)$ 点 x 处连续，由 x 的任意性知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，现设 $f(t)$ 在 $t=x$ 处连续，于是，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|t-x|<\delta$ 时，恒有

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon,$$

于是当 $0<|\Delta x|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|\\&=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}(f(t)-f(x))\mathrm{d}t\right|\\&<\frac{1}{|\Delta x|}\varepsilon|\Delta x|=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $F'(x)$ 存在，且

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x),$$

而在 $f(x)$ 的不连续点，$F'(x)$ 可能存在也可能不存在.

例如，设

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x=\dfrac{1}{n}\text{ 时}\\[2ex] 0 & \text{当 } x\neq\dfrac{1}{n}\text{ 时}\end{cases} \qquad (n=1,2,\cdots),$$

仿照 2194 题可证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是可积，且显然

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^x f(t)\mathrm{d}t=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

然而在点 $x=\dfrac{1}{n}$ 处,$F(x)=C$ 的导函数

$$F'(x)=0.$$

但对于函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$,它在$[-1,1]$上是可积的,且

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=|x|,$$

然而在 $f(x)$ 的不连续点 $x=0$ 处,$F(x)=|x|+C$ 的导数$F'(x)$不存在.

求出下列有界非连续函数的不定积分(2303 ~ 2308).

【2303】 $\displaystyle\int \operatorname{sgn}x\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int \operatorname{sgn}x\mathrm{d}x=\int_0^x \operatorname{sgn}x\mathrm{d}x+C=|x|+C.$

【2304】 $\displaystyle\int \operatorname{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x.$

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上可积,故其原函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.对任何 x,必存在唯一的整数 k.使 $k\pi\leqslant x<(k+1)\pi$,于是

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos t)\Big|_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x\\&=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos x)-\frac{\pi}{2}\\&=\arccos(\cos x),\end{aligned}$$

故

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x=\arccos(\cos x)+C$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

【2305】 $\int [x]\mathrm{d}x \quad (x \geqslant 0)$.

解 $$\int_0^x [t]\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} k\,\mathrm{d}t + \int_{[x]}^x [x]\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=0}^{[x]-1} k + [x](x-[x])$$
$$= \frac{[x]([x]-1)}{2} + [x](x-[x])$$
$$= x\cdot[x] - \frac{[x]^2+[x]}{2}.$$

因此 $$\int [x]\mathrm{d}x = x[x] - \frac{[x]^2+[x]}{2} + C.$$

【2306】 $\int x[x]\mathrm{d}x \quad (x \geqslant 0)$.

解 $$\int_0^x t[t]\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} kt\,\mathrm{d}t + \int_{[x]}^x [x]t\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{[x]-1}\left(\frac{kt^2}{2}\Bigg|_k^{k+1}\right) + \frac{[x]}{2}t^2\Bigg|_{[x]}^x$$
$$= \sum_{k=0}^{[x]-1}\left(k^2+\frac{k}{2}\right) + \frac{[x](x^2-[x]^2)}{2}$$
$$= \frac{([x]-1)[x](2[x]-1)}{6} + \frac{[x]([x]-1)}{4}$$
$$+ \frac{x^2[x]-[x]^3}{2}$$
$$= \frac{x^2[x]}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}.$$

所以 $$\int x[x]\mathrm{d}x = \frac{x^2[x]}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C.$$

【2307】 $\int (-1)^{[x]}\mathrm{d}x$.

解 利用 2304 题的结果可得

$$\int (-1)^{[x]}\mathrm{d}x = \int_0^x \mathrm{sgn}(\sin\pi x)\mathrm{d}x + C$$

$$= \frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)\Big|_0^x + C$$

$$= \frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x) + C.$$

【2308】 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$,其中

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 若 \mid x \mid < t, \\ 0, & 若 \mid x \mid > t. \end{cases}$$

解 当 $x \geqslant t$ 时

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x + \int_t^x f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}x + \int_t^x 0 \cdot \mathrm{d}x = t,$$

当 $t \leqslant -t$ 时,则 $-x \geqslant t$,所以

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^x f(-t)\mathrm{d}u = -\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = -t,$$

当 $\mid x \mid < t$ 时

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^x 1\mathrm{d}x = x,$$

因此 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mid t + x \mid - \mid t - x \mid).$

计算下列有界非连续函数的定积分(2309 ~ 2314).

【2309】 $\int_0^3 \mathrm{sgn}(x - x^3)\mathrm{d}x.$

解 $\mathrm{sgn}(x - x^3) = \begin{cases} 1 & 当 0 < x < 1 时, \\ -1 & 当 1 < x < 3 时. \end{cases}$

所以 $\int_0^3 \mathrm{sgn}(x - x^3)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_1^3 \mathrm{d}x = -1.$

【2310】 $\int_0^2 [e^x]\mathrm{d}x.$

解 因为 $7 < e^2 < 8$,所以

$$\int_0^2 [e^x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\ln 2} 1\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\mathrm{d}x+\int_{\ln 3}^{\ln 4} 3\mathrm{d}x+\cdots+\int_{\ln 7}^{2} 7\mathrm{d}x$$

$$=\ln 2+2(\ln 3-\ln 2)+3(\ln 4-\ln 3)+\cdots+7(2-\ln 7)$$

$$=14-(\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln 7)=14-\ln(7!).$$

【2311】 $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^2 \sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x+\int_2^3 2\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x+\int_3^4 3\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x$$

$$+\int_4^5 4\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x+\int_5^6 5\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{6}+\cos\frac{4\pi}{6}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{5\pi}{6}-5\cos\pi\right)=\frac{30}{\pi}.$$

【2312】 $\int_0^{\pi} x\operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^{\pi} x\operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{4}.$

【2313】 $\int_1^{n+1}\ln[x]\mathrm{d}x$，其中 a 为自然数.

解 $\int_1^{n+1}\ln[x]\mathrm{d}x$

$$=\int_2^3 \ln 2\mathrm{d}x+\int_3^4 \ln 3\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\ln n\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\ln k=\ln(n!).$$

【2314】 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\mathrm{d}x$

$$=\int_{e^{-\pi}}^{1}(-1)\mathrm{d}x+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}}(-1)^{k+1}\mathrm{d}x$$

$$=-1+2e^{-\pi}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^{-(k-1)\pi}$$

$$=-1+\frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}=\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1}=-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

【2315】 求$\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$,

其中 E 为在区间$[0,4\pi]$中使被积分式有意义的数值的集合.

解 $\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$

$$=\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$+\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx+\int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{8}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}.$$

§3. 中值定理

1. **函数的平均值　数**

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的平均值.

若函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$是连续的,则存在一点 $c\in(a,b)$ 点满足:$M[f]=f(c)$.

2. **第一中值定理**　若(1) 函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在区间$[a,b]$上有界并可积分;

(2) 当 $a<x<b$ 时,函数 $\varphi(x)$ 符号不变,则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\mu\int_a^b\varphi(x)\,dx,$$

其中 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 及 $m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$,$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$;

(3) 此外,函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$是连续的,则 $\mu=f(c)$,其

中 $a\leqslant c\leqslant b$.

3. **第二中值定理** 若(1) 函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界并可积分；

(2) 当 $a<x<b$ 时函数 $\varphi(x)$ 单调，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+\varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$；

(3) 若函数 $\varphi(x)$ 单调递减(广义上)且非负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant\xi\leqslant b);$$

(4) 若函数 $\varphi(x)$ 单调递增(广义上)且非负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

【2316】 确定下列定积分的符号：

(1) $\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x\mathrm{d}x$； (4) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}(t+\pi)\sin t\mathrm{d}t$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x<0;$$

(2) 由第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(t+\pi)}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2\sin C}{C(C+\pi)}>0$$

其中　$0 < C < \pi$；

(3) $\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx = \int_0^2 x^3 e^x dx + \int_{-2}^{0} x^3 e^x dx$

$$= \int_0^2 x^3 e^x dx - \int_0^2 t^3 e^{-t} dt$$

$$= \int_0^2 x^3 (e^x - e^{-x}) dx > 0$$

(因为在$(0,2)$上，$x^3(e^x - e^{-x}) > 0$)；

(4) 由第一中值定理有

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx = \frac{1}{2} C^2 \ln C < 0$$

其中　$\frac{1}{2} < C < 1$.

【2317】　下列各题那个积分较大：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ 或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$?

(2) $\int_0^1 e^{-x} dx$ 或 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$?

(3) $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ 或 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$?

解　(1) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$0 < \sin x < 1$，从而 $0 < \sin^{10} x < \sin^2 x$，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

(2) 当 $0 < x < 1$ 时，$x > x^2$，从而 $e^{-x} < e^{-x^2}$，

于是　$$\int_0^1 e^{-x} dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(3) $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} e^{-(x+\pi)^2} \cos^2 x dx$

$$< \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

【2318】　求下列已知函数在指定区间的平均值：

(1) $f(x) = x^2$ 在$[0,1]$区间；

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,100]$区间；

(3) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ 在$[0,2\pi]$区间；

(4) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ 在$[0,2\pi]$区间.

解　(1) $M(f)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$；

(2) $M(f)=\frac{1}{100}\int_0^{100}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{100}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{100}=6\frac{2}{3}$；

(3) $M(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(10+2\sin x+3\cos x)\mathrm{d}x=10$；

(4)
$$\begin{aligned}M(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\sin(x+\varphi)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cos\varphi-\cos(2x+\varphi)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cos\varphi.\end{aligned}$$

【2319】　求下列椭圆焦径长度的平均值：

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\qquad(0<\varepsilon<1).$$

解　设 $\varphi=\pi+t$，并利用 $\cos\varphi$ 为以 2π 为周期的周期函数及2213题的结果有

$$\begin{aligned}M(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{p}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\\&=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.\end{aligned}$$

【2320】　求出自由落体的速度平均值，设初速度等于 v_0.

解　自由落体的速度为 $v=v_0+gt$，

在时间段 $0\leqslant t\leqslant T$ 内速度的平均值

$$M(v)=\frac{1}{T}\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gT+v_0$$

$$= \frac{1}{2}(v_0 + v_T),$$

即平均速度等于初速度与末速度之和的一半.

【2321】 交流电强度按照以下规律变化:

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

其中 i_0 为振幅,t 为时间,T 为周期及 φ 为初相. 求电流强度平方的平均值.

解 $$M(i^2) = \frac{1}{T}\int_0^T i_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{i_0^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) - \frac{1}{4}\sin 2\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\right]\Bigg|_0^T = \frac{i_0^2}{2}.$$

【2321.1】 令 $f(x) \in C[0, +\infty)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,求:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x.$$

研究例题 $f(x) = \arctan x$.

解 分三种情况讨论

(1) $A > 0$,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,所以存在 $R > 0$,使得当 $x > R$ 时 $f(x) > \frac{A}{2}$.

故
$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^R f(x)\mathrm{d}x + \int_R^x f(x)\mathrm{d}x$$
$$> \int_0^R f(x) + \int_R^x \frac{A}{2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^R f(x) + \frac{A}{2}(x - R),$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = +\infty.$$

应用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

(2) 若 $A < 0$,则同样的讨论可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=-\infty,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

(3) 若 $A=0$,则选取 $B>0$,设

$$g(x)=f(x)+B,$$

则 $$\lim_{x\to+\infty}g(x)=B>0.$$

由情形(1) 的讨论可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}g(x)=B,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x g(x)\mathrm{d}x-\int_0^x B\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x g(x)\mathrm{d}x}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x B\mathrm{d}x}{x}$$

$$=B-B=0.$$

综上所述,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(x)\mathrm{d}x}{x}=A.$

设 $$f(x)=\arctan x,$$

则 $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\arctan x\mathrm{d}x}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

【2322】 设 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf(\theta x)$,求出 θ. 若:

(1) $f(t)=t^n(n>-1)$;

(2) $f(t)=\ln t$;

(3) $f(t)=\mathrm{e}^t$

$\lim\limits_{x\to+0}\theta$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$ 等于多少?

解 (1) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

从而 $$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta^n x^{n+1},$$

所以 $$\theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

(2) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \ln t\mathrm{d}t = t(\ln t - 1)\Big|_0^x = x(\ln - 1)$,

从而 $$x(\ln x - 1) = x\ln(\theta x),$$

于是 $$\theta = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(3) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x - 1$,

从而 $$\mathrm{e}^x - 1 = x\mathrm{e}^{\theta x},$$

于是 $$\theta = \frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\theta &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\cdot\frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^x}{2x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\theta &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{x}\right) = 1.\end{aligned}$$

利用第一中值定理,估算积分(2323 ~ 2325).

【2323】 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1 + 0.5\cos x}$.

解 因为

$$\frac{1}{1 + 0.5} \leqslant \frac{1}{1 + 0.5\cos x} \leqslant \frac{1}{1 - 0.5},$$

即 $$\frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{1 + 0.5\cos x} \leqslant 2,$$

所以 $$\frac{4\pi}{3}\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+0.5\cos x}\mathrm{d}x\leqslant 4\pi.$$

【2324】 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$

解 由第一中值定理知存在 $C\in(0,1)$，使得

$$\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1+C}}\int_0^1 x^9\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{10\sqrt{1+C}}x^{10}\Big|_0^1=\frac{1}{10\sqrt{1+C}},$$

而 $$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+C}}\leqslant 1,$$

所以 $$\frac{1}{10\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{10}.$$

【2325】 $\displaystyle\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x.$

解 $$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{200}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}}{100}\qquad(0\leqslant x\leqslant 100),$$

从而 $$\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{200}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{100}\mathrm{d}x,$$

即 $$\frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{200}\leqslant\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{100}.$$

【2326】 证明等式：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0$；

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$

证 (1) 因为当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$0\leqslant\frac{x^n}{1+x}\leqslant x^n,$$

所以 $$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}.$$

而 $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0.$$

(2) 对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 且设 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$,则

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

$$\leqslant \varepsilon + \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = 0,$$

故存在 $N > 0$,使得当 $n > N$ 时

$$\left|\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right| < \varepsilon.$$

故当 $n > N$ 时

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x < 2\varepsilon,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0.$$

【2326.1】 求出:

(1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\varepsilon x^2+1}$;

(2) $\lim\limits_{\varepsilon\to +0}\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} f(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

其中 $a > 0, b > 0$ 及 $f(x) \in C[0,1]$.

解 (1) $$\lim_{\varepsilon\to +0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\varepsilon x^2+1} = \lim_{\varepsilon\to +0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(\sqrt{\varepsilon}x)}{1+(\sqrt{\varepsilon}x)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to +0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\arctan(\sqrt{\varepsilon}x)\Big|_0^1 = \lim_{\varepsilon\to +0}\frac{\arctan\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} = 1.$$

(2) 由于 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,故由积分中值定理,存在 $c(\varepsilon a < c < \varepsilon b)$ 使得

$$\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} f(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = f(c)\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} f(x)\,\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} f(c)\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} f(c)\ln\frac{b}{a}$

$$= f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

【2327】 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，而函数 $\varphi(x)$ 在区间$[a,b]$上连续且在区间(a,b)可微分，而且当 $a<x<b$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$.

运用分部积分法和利用第一中值定理，证明第二中值定理.

证 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}F(x)\\ &= F(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\\ &= F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-F(\eta)\int_a^b\varphi'(x)\mathrm{d}x\\ &= F(b)\varphi(b)-F(\eta)[\varphi(b)-\varphi(a)]\\ &= \varphi(b)[F(b)-F(\eta)]+\varphi(a)F(\eta)\\ &= \varphi(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x+\varphi(a)\int_a^\eta f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $a\leqslant\eta\leqslant b$.

利用第二中值定理估算积分(2328 ～ 2330).

【2328】 $\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

解 设 $f(x)=\sin x, \varphi(x)=\frac{1}{x}$，

则 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在$[100\pi, 200\pi]$上满足第二中值定理的条件，特别 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 单调下降且不为负，于是

$$\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1-\cos\xi}{100\pi} = \frac{\sin^2\dfrac{\xi}{2}}{50\pi} = \frac{\theta}{50\pi},$$

其中 $100<\xi<200\pi,0\leqslant\theta\leqslant 1$.

【2329】 $\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\mathrm{d}x \quad (\alpha\geqslant 0;0<a<b)$.

解 设 $f(x)=\sin x,\varphi(x)=\frac{e^{-\alpha x}}{x}$

则 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上满足第二中值定理的条件，$\varphi(x)$ 单调下降且非负. 所以

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{e^{-\alpha a}}{a}\int_a^{\xi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{ae^{\alpha a}}(\cos a-\cos\xi)$$

$$=-\frac{2}{ae^{\alpha a}}\sin\frac{a+\xi}{2}\sin\frac{a-\xi}{2}=\frac{2}{a}\theta,$$

其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$, $|\theta|\leqslant 1$.

【2330】 $\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x \quad (0<a<b)$.

解 设 $x=\sqrt{t}$,

则 $$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}},$$

$$\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

设 $$f(t)=\sin t,\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{t}},$$

应用第二中值定理有

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi)$$

$$=\frac{1}{a}\sin\frac{\xi+a^2}{2}\sin\frac{\xi-a^2}{2}=\frac{1}{a}\theta.$$

其中 $a^2\leqslant\xi\leqslant b^2$, $|\theta|\leqslant 1$

因此 $$\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x=\frac{\theta}{a} \qquad (|\theta|\leqslant 1).$$

【2331】 设函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在区间$[a,b]$上可积且平方可积，证明柯西-布尼亚科夫斯基不等式：

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b \psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 法一：因为对任何实数 λ 都有

$$\int_a^b [\varphi(x)-\lambda\psi(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

即
$$\int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x - 2\lambda\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x + \lambda^2\int_a^b \psi^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

所以左边的二次三项式的判别式必不大于零，即

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2 - \int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \psi^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

因此
$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

法二：
$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \psi^2(x)\mathrm{d}x\right) - \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \psi^2(y)\mathrm{d}y\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\int_a^b \psi^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \varphi^2(y)\mathrm{d}y\right) \\
&\quad - \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b \varphi(y)\psi(y)\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b\left\{\int_a^b [\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)]^2\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y \geqslant 0,
\end{aligned}$$

故
$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

【2332】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可微分且 $f(a)=0$. 证明不等式：$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$

其中 $M = \sup\limits_{a<x<b} |f(x)|$.

证 设 $x\in[a,b]$，利用柯西—布尼亚科夫斯基不等式有

$$\left\{\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right\}^2 \leqslant \int_a^x 1\cdot\mathrm{d}x\cdot\int_a^x f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

即
$$f^2(x) = [f(x)-f(a)]^2 \leqslant (x-a)\int_a^x f'^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

由 x 的任意性有

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

【2333】 证明不等式:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 0 \quad (p>0).$$

证 当 $n \leqslant x \leqslant n+p$,有

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

所以
$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{p}{n} \longrightarrow 0(n\to\infty),$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 0.$$

§4. 广义积分

1. **函数的广义可积性** 若函数 $f(x)$ 在每一个有穷区间 $[a,b]$ 上依平常意义是可积分的,则定义:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

若函数 $f(x)$ 在 b 点的邻域内无界且在每一个区间 $[a,b-\varepsilon](\varepsilon>0)$ 内依平常意义是可积分的,则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \qquad ②$$

若 ① 或 ② 极限存在,则相应的积分称为收敛的,否则称为发散积分(基本定义!).

2. **柯西准则** 积分 ① 收敛的充要条件是对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在数 $b=b(\varepsilon)$,当 $b'>b$ 和 $b''>b$ 时,下列不等式成立:

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

对于型同 ② 式的积分有类以的柯西准则.

3. 绝对收敛的判别法 若 $|f(x)|$ 是广义可积分的，则函数 $f(x)$ 的相应积分 ① 或 ② 称为绝对收敛，而且显然是收敛积分.

比较判别法 1 当 $x \geqslant a$ 时，$|f(x)| \leqslant F(x)$.

若 $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

比较判别法 2 当 $x \to +\infty$ 时，若 $\psi(x) > 0$ 和 $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$，则积分 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{+\infty} \psi(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或发散，特别是当 $x \to +\infty$ 时，若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$，该结论也成立.

比较判别法 3 (1) 当 $x \to +\infty$ 时，

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

此时，若 $p > 1$，积分 ① 则收敛；而若 $p \leqslant 1$，积分 ① 则发散.

(2) 当 $x \to b - 0$ 时，

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right).$$

此时，若 $p < 1$，积分 ② 则收敛；而若 $p > 1$，积分 ② 则发散.

4. 收敛性的特别判别法 若：

(1) 当 $x \to +\infty$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调地趋近于零；

(2) 函数 $f(x)$ 有有界原函数：$F(x) = \int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi$，

则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但一般来说，并非绝对收敛.

特别是若 $p > 0$，则积分：$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\,(a > 0)$ 收敛.

5. 柯西主值 若函数 $f(x)$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 时存在正常积分：

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \text{ 及 } \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a < c < b),$$

则下数

$$V \cdot P \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right],$$

称为柯西主值(V. P.).

类似的，$V \cdot P \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

计算下列积分：

【2334】 $\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad (a>0)$.

解 $\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{R\to+\infty}\int_{a}^{R} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{a}$.

【2335】 $\int_{0}^{1} \ln x\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{0}^{1} \ln x\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1} \ln x\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}(x\ln x - x)\Big|_{\varepsilon}^{1}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(\varepsilon-\varepsilon\ln\varepsilon-1) = -1.$$

【2336】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 因为

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty}\int_{0}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \arctan R = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$= \lim_{R\to+\infty}(-\arctan(-R)) = \frac{\pi}{2},$$

所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

【2337】 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\eta\to+0}\int_{0}^{1-\eta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}[-\arcsin(-1+\varepsilon)] + \lim_{\eta\to+0}\arcsin(1-\eta)$$

$$= \pi.$$

【2338】 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

解 $$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\right)\bigg|_2^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{b-1}{b+2} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

【2339】 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

解 由 1921 题的结果有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

所以 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left\{\frac{1}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right]\right\}$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}\left\{\left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2b+1}{\sqrt{3}}\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right\}$$

$$= -\left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【2340】 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

解 由 1881 题的结果有

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C,$$

所以
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^3}$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]\Bigg|_0^b$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(b+1)^2}{b^2-b+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2b-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【2341】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解 由 1712 题的结果有

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C,$$

所以
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\int_\varepsilon^b\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$
$$=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)\Bigg|_\varepsilon^b$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

【2342】 $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

解 先求出 $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

设 $\sqrt{1-x}=t$,

则 $x=1-t^2, dx=-2tdt$

所以 $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{dt}{1+t^2}$

$$=-2\arctan t+C=-2\arctan\sqrt{1-x}+C,$$

故
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\arctan\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\arctan\sqrt{1-(1-\varepsilon)}+2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

【2343】 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

解 设$\sqrt{1+x^5+x^{10}}+x^5=t$,

则当 $1\leqslant x\leqslant\infty$ 时,$1+\sqrt{3}\leqslant t<+\infty$,

所以
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=\frac{2}{5}\int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$
$$=\frac{1}{5}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{1+\sqrt{3}}^{+\infty}=0-\frac{1}{5}\ln\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

【2344】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解 因为$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}=0$,

即被积函数在 $x=0$ 处连续,又当 $x>1$ 时
$$\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^2}<\frac{1}{x^2},$$

所以积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$收敛,又
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

对右边的第一个积分作变量代换，令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，因而

$$\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\int_{+\infty}^1 \frac{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=0.$$

【2345】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{acrtan}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解 设 $x=\tan t$，

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sec^2 t}{\sec^3 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

【2346】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x\quad(a>0).$

解 根据 1828 题的结果有

$$\int \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{-a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{-ax}+C,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\left(\frac{-a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{-ax}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

【2347】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x\quad(a>0).$

解 根据 1829 题的结果有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\left(\frac{-a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{-ax}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}.$$

利用递推公式计算下列广义积分(n 为自然数)(2248 ~ 2252).

【2348】 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$

解 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x})$

$$= -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1},$$

又 $$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

所以 $$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots$$
$$= n(n-1)\cdots 2\cdot 1 I_0 = n!.$$

【2349】 $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2>0).$

解 根据 1921 的结果有

$$I_n = \frac{ax+b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{2(ac-b^2)}I_{n-1}$$

$$= \frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1} \qquad (n>1),$$

即 $$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)}\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1} \qquad (n>1),$$

又 $$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}\arctan\frac{|a|\left(x+\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}},$$

因此 $$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

【2350】 $I_n = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+1}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = 1$，且 $n+1>1$，所以 I_n 收敛. 先考虑 $n>1$

$$I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{x+n-x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{n}I_{n-1}-\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}\mathrm{d}x.$$

对于右边第二个积分，令 $t=x+1$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}\mathrm{d}x$$
$$=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)\cdots(t+n-1)}$$
$$=I_{n-1}-\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$

所以 $$I_n = \frac{1}{n}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$ 而

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$
$$=\frac{1}{(n-1)!x}-\frac{1}{(n-2)!(x+1)}+\frac{1}{2!(n-3)!(x+2)}$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!(x+n-1)}$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-1)^k\cdot\frac{1}{x+k},$$

因此 $$I_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-1)^k\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+k}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}(-1)^{k}[\ln(k+2)-\ln(k+1)]$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}(-1)^{k-1}\ln(k+1).$$

显然 $I_1 = \ln 2$.

【2351】 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1-0} \sqrt{1-x} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{1}{2}$,

所以积分 I_n 收敛,设 $x = \sin t$,并利用 2281 题结果有

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} & 当 n = 2k 时, \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} & 当 n = 2k-1 时. \end{cases}$$

【2352】 $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^{n+1} x}$.

解 显然积分收敛,设 $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$,则当 $0 \leqslant x < +\infty$ 时,$\frac{\pi}{2} \leqslant t < \pi$. $\mathrm{ch}x = \frac{1}{\sin t}$,$\mathrm{d}x = \frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t$. 所以

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^{n+1} x}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u$$

$$= \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, 当 n = 2k 时, \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, 当 n = 2k-1 时. \end{cases}$$

【2353】 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \,\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \,\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\cdot\ln\sin x=0,$$

所以积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛，而令

$$x=\frac{\pi}{2}-t,$$

则
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t.$$

所以积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$ 也收敛，设

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x,$$

则
$$\begin{aligned}2A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\ln 2\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t\right)-\frac{\pi}{2}\ln 2\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\ln 2=A-\frac{\pi}{2}\ln 2,\end{aligned}$$

所以
$$A=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

【2354】 求$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$，

其中 E 为在区间$(0,+\infty)$上使被积分式有意义的 x 的集.

解 $\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$$

这里$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}S_k=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}S_k$. 而

$$\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$=2\int e^{-\frac{x}{2}}d(\sqrt{\sin x})-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx$$

$$=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}+\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}dx$$

$$=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}+C,$$

所以 $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$

$$=\int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$+\int_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\Big|_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi}-2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\Big|_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi}$$

$$=2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-k\pi}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}.$$

因此 $\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}2\sqrt[4]{8}e^{-k\pi}e^{-\frac{\pi}{8}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}\frac{1-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}.$$

【2355】 证明等式：

$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx,$$

其中 $a>0,b>0$(假定等式左边的积分有意义).

证 设 $ax-\dfrac{b}{x}=t$,

则当 $0<x<+\infty$ 时 $-\infty<t<+\infty$,

$$ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}.$$

将此二式相加得

$$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab}),$$

从而
$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t.$$

因此
$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

即
$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})\mathrm{d}x.$$

【2356】 $M[f]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的平均值.

求出下列函数的平均值:

(1) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(x\sqrt{2})$;

(2) $f(x)=\arctan x$;

(3) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}&\int_0^x[\sin^2 t+\cos^2(t\sqrt{2})]\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\left[\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{1+\cos(2\sqrt{2}t)}{2}\right]\mathrm{d}t\\&=x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}x),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}M[f]&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x[\sin^2 t+\cos^2(t\sqrt{2})]\mathrm{d}t\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\sin 2x}{4x}+\frac{\sin(2\sqrt{2}x)}{4\sqrt{2}x}\right]=1.\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t&=t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}M[f]&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\arctan x-\frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x}\right]\\&=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(3) 利用第二中值定理,有

$$\begin{aligned}\int_0^x\sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t&=\sqrt{x}\int_c^x\sin t\mathrm{d}t\\&=\sqrt{x}(\cos c-\cos x)\qquad(0\leqslant c\leqslant x),\end{aligned}$$

于是 $$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos c-\cos x}{\sqrt{x}}=0.$$

【2357】 求：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{\ln\frac{1}{x}}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}x^a\int_x^1\frac{f(t)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t$.

其中 $a>0$，$f(t)$ 为在区间$[0,1]$的连续函数.

解 (1) 易证
$$1-\frac{t^2}{2}\leqslant\cos t\leqslant1,$$
所以 $$\int_x^1\frac{1-\frac{t^2}{2}}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$
而 $$\int_x^1\frac{1-\frac{t^2}{2}}{t^2}\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x},$$
$$\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-1+\frac{1}{x},$$
因而 $$-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\leqslant\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant-1+\frac{1}{x},$$
而 $$\lim_{x\to0}x\left(-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)=1,$$
$$\lim_{x\to0}x\left(-1+\frac{1}{x}\right)=1,$$
由两边夹定理，得到
$$\lim_{x\to0}x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t=1.$$

(2) 由于

$$\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt > \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

所以当 $x \to +\infty$ 时

$$\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt \to +\infty,$$

利用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

(3) 因

$$\lim_{t\to+0} t(t^{-1}e^{-t}) = \lim_{t\to+0} e^{-t} = 1,$$

故$\int_0^1 t^{-1}e^{-t}dt$ 发散，而显然$\int_1^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt$ 收敛，所以所求极限为$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定型. 利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{-x^{-1}e^{-x}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}(e^{-x}) = 1.$$

(4) 若 $f(0) \neq 0$，则积分$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt$ 发散，所求极限为$\frac{\infty}{\infty}$ 未定式. 应用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt = \lim_{x\to+0}\frac{\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+0}\frac{-\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}}{-\alpha\frac{1}{x^{\alpha+1}}}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{\alpha} = \frac{f(0)}{\alpha}.$$

若　$f(0) = 0$,

则设　$g(x) = f(x) + 1$,

从而　$g(0) = 1 \neq 0$,

所以　$\lim_{x\to+0} x^\alpha \int_x^1 \frac{g(t)}{t^{\alpha+1}}dt = \frac{1}{\alpha}$,

因此　$\lim_{x\to+0} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt = \lim_{x\to+0} x^\alpha \left(\int_x^1 \frac{g(t)-1}{t^{\alpha+1}}dt\right)$

$$= \lim_{x\to+0} x^{\alpha}\int_{x}^{1}\frac{g(t)}{t^{\alpha+1}} - \lim_{x\to+0} x^{\alpha}\int_{x}^{1}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = 0.$$

综上所述,我们有 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha}\int_{x}^{1}\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{\alpha}$.

研究下列积分的收敛性(2358 ~ 2377).

【2358】 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} = 1$,

所以积 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1}$ 收敛.

【2359】 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2 + 1}} = 1$,

所以 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}$ 收敛.

【2360】 $\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1+0}(x - 1)\cdot\frac{1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$,

所以积分 $\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散,从而积分 $\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 也发散.

【2361】 $\int_{0}^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{0}^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$,

对于积分 $\int_{0}^{1} x^{p-1}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$,由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^{1-p}}}=\lim_{x\to+0}(x^{1-p}\cdot x^{p-1}e^{-x})=1,$$

故当 $1-p<1$,即 $p>0$ 时,积分$\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛,又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x}=0.$$

所以对一切 $p\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛,因此,当 $p>0$ 时积分 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛.

【2362】 $\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$.

解 $\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$,

先讨论积分$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$.因为

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^{-q}\cdot x^p\ln^q\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-0}x^p\left(\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)^q$$

$$=\lim_{x\to1-0}\left[\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right]^q=\left(\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x}\right)^q=1,$$

故当 $-q<1$,即 $q>-1$ 时积分$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$ 收敛.

当 $-q\geqslant1$,即 $q\leqslant-1$ 时发散.于是当 $q\leqslant-1$ 时,积分 $\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$ 必发散.

下面讨论$\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad (q>-1)$.

若 $p>-1$,可取 $\tau>0$ 充分小,使 $p-\tau>-1$,而

$$\lim_{x\to+0}x^{-p+\tau}\cdot x^p\ln^q\frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q}{\left(\frac{1}{x}\right)^\tau}=0,$$

由于 $-p+\tau<1$,故此时积分$\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $p\leqslant-1$ 则

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\ln\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{q+1}}{q+1}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=+\infty(q>-1),$$

故此时$\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述,当 $p>-1$,且 $q>-1$ 时,积分$\int_0^1x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

【2363】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\quad(n\geqslant0)$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$,

而 $$\lim_{x\to+0}x^{-m}\frac{x^m}{1+x^n}=1,$$

故当且仅当 $-m<1$,即 $m>-1$ 时$\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$ 收敛,又

$$\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}=1,$$

故当且仅当 $n-m>1$ 时,积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}$ 收敛.因此,当 $m>-1$ 且 $n-m>1$ 时积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}$ 收敛.

【2364】 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x^n}\mathrm{d}x\quad(a\neq0)$.

解 不妨设 $a>0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x^n}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\arctan ax}{x^n}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x^n}\mathrm{d}x$$

由于 $$\lim_{x\to+0}x^{n-1}\frac{\arctan ax}{x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{\mathrm{arctna}\,ax}{x}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{a}{1+a^2x^2} = a,$$

故当且仅当 $n-1<1$，即 $n<2$ 时，积分 $\int_0^1 \frac{\text{arctna}ax}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛，又

$$\lim_{n\to\infty} x^n \cdot \frac{\arctan ax}{x^n} = \frac{\pi}{2},$$

故当且仅当 $n>1$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛，总之当且仅当 $1<n<2$ 时 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛.

【2365】 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x.$$

而
$$\lim_{x\to+0} x^{n-1} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x\to+0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

所以当且仅当 $n-1<1$，即 $n<2$ 时积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $n>1$ 时，取 $\tau>0$ 充分小使得 $n-\tau>1$，由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n-\tau} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\tau} = 0,$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛. 而当 $n\leqslant 1$ 时，由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

故此时 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 发散.

总之，当且仅当 $1<n<2$ 时 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛.

【2366】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n}\mathrm{d}x \quad (n\geqslant 0).$

解 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx$

$$=\int_0^1\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx,$$

由于 $\lim\limits_{x\to+0}x^{-m-1}\cdot\frac{x^m\cdot\arctan x}{2+x^n}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{2+x^n}\lim\limits_{x\to+0}\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{2}$,

故当且仅当$-m-1<1$,即$m>-2$时积分$\int_0^1\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx$收敛,

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-m}\cdot\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}=\frac{\pi}{2}$,

故当且仅当$n-m>1$时,积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx$收敛.

总之,当且仅当$m>-2$,$n-m>1$时,积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx$收敛.

【2367】 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx\quad(n\geqslant 0)$.

解 当$a\neq 0$时,设

$$f(x)=\cos ax,g(x)=\frac{1}{1+x^n},$$

则对任何$x>0$

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\leqslant\frac{2}{a},$$

且当$n>0$时,$g(x)=\frac{1}{1+x^n}$单调减少且趋于零(当$x\to+\infty$时),

从而知积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$收敛.当$n=0$时积分显然发散.

当$a=0$时,由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^n\frac{1}{1+x^n}=1,$$

故此时,积分仅当$n>1$时收敛.

总之,当$a\neq 0$,$n>0$及$a=0$,$n>1$时积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$收敛.

【2368】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

解 $\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-2\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$,

显然积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散,而对任何 $x>1$

$$\left|\int_1^x\cos 2t\mathrm{d}t\right|\leqslant 1,$$

且当 $x\to+\infty$ 时,$\frac{1}{2x}$ 单调减少也趋于零,故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛,从而积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.因此积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

【2369】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$.

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x},$$

因为 $$\lim_{x\to+0}x^p\cdot\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p\frac{1}{\cos^q x}=1,$$

所以当且仅当 $p<1$ 时积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛,又

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left[\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right]^q\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\sin^p x}$$

$$=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^q=1,$$

所以当且仅当 $q<1$ 时积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上所述,当且仅当 $p<1,q<1$ 时,积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$

收敛.

【2370】 $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

由于 $\lim\limits_{x\to+0} x^{-n} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} = 1$,

故当且仅当 $-n < 1$ 即 $n > -1$ 时积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 收敛,而

$$\lim_{x\to1-0} \sqrt{1-x} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 收敛,因此当 $n > -1$ 时积分 $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 收敛.

【2370.1】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = 1$,

所以积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ 发散.

【2371】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$.

解 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$.

为了讨论方便,不妨设

$$\min(p,q) = p, \max(p,q) = q,$$

由于

$$\lim_{x\to+0} x^p \frac{1}{x^p+x^q} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{1+x^{q-p}} = 1,$$

故当且仅当 $p = \min(p,q) < 1$ 时积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}$ 收敛,又

$$\lim_{x\to+\infty} x^q \frac{1}{x^p+x^q} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-q}+1} = 1,$$

故当且仅当 $q=\max(p,q)>1$ 时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 收敛.

总之，当且仅当 $\min(p,q)<1$，且 $\max(p,q)>1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 收敛.

【2372】 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x,$

由于 $\lim_{x\to+0}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0,$

故积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛. 又

$$\lim_{x\to1-0}\left(\sqrt{1-x}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to1-0}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{1+x}\right) = 0,$$

故积分$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛. 因此$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

【2373】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 因为

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{\frac{5}{6}}\cdot\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+0}\left(-3\cos x\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\sin x}\right) = 0.$$

故积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

【2374】 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$

解 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$.

因为 $\lim\limits_{x\to1+0}\left[(x-1)^q\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}\right]$

$$=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^p}\cdot\left(\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=1,$$

故当且仅当 $q<1$ 时积分 $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

如果 $p>1$，取 $\tau>0$ 充分小，使 $p-\tau>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-\tau}\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\tau\ln^q x}=0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 收敛.

如果 $p\leqslant1$，$q<1$. 由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}=\left.\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\right|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故此时积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}dx$ 发散.

综上所述，当且仅当 $p>1$ 且 $q<1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

【2375】 $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$.

解 $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$

$$=\int_e^3\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}+\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to e+0}\frac{(x-e)^r}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\frac{1}{e^p}\cdot\lim\limits_{x\to e+0}\left(\frac{x-e}{\ln\ln x}\right)^r$

$$=\frac{1}{e^p}\left[\lim_{x\to e+0}\frac{1}{\frac{1}{x\ln x}}\right]^r=e^{r-p}.$$

故当且仅当 $r<1$ 时积分 $\int_e^3\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 收敛.

下面讨论积分$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$

(1) 如果 $p>1$，则取 $\tau>0$ 充分小，使 $p-\tau>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-\tau}}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\tau(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=0,$$

故此时积分$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$收敛.

(2) 如果 $p=1$，则有

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^q(\ln x)^r},$$

则由 2374 题的讨论知.

当 $p=1,q>1,r<1$ 时，积分$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$收敛.

(3) 如果 $p<1$，则取 $\delta>0$ 充分小，使 $p+\delta<1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+\delta}}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\delta}{(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$=+\infty,$$

故此时积分$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$发散.

综上所述，当 $p>1$ 且 $r<1$ 或当 $p=1,q>1,r<1$ 时积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$收敛.

【2376】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$

$(a_1<a_2<\cdots<a_n)$.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}|x|^{(\sum_{i=1}^n p_i)}\cdot\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}=1,$$

且　$$\lim_{x\to a_i}\left[|x-a_i|^{p_i}\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}\right]$$

$$= c_i$$

$$0 < c_i < +\infty \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

因此,当且仅当

$$p_i < 1 \qquad (i = 1,2,\cdots,n),$$

且$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i > 1$时,积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$收敛.

【2376.1】 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}|x-1|^{\beta}\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0+}(x^{-\alpha}\cdot x^{\alpha}|x-1|^{\beta}) = 1,$$

$$\lim_{x\to 1}(|x-1|^{-\beta}\cdot x^{\alpha}|x-1|^{\beta}) = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x^{-(\alpha+\beta)}\cdot x^{\alpha}|x-1|^{\beta}) = 1,$$

所以当且仅当$-\alpha < 1$, $-\beta < 1$且$-(\alpha+\beta) > 1$时积分$\int_0^{+\infty} x^{\alpha}|x-1|^{\beta}\mathrm{d}x$收敛.

【2377】 $\int_0^{+\infty} \dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}\mathrm{d}x$

其中$P_m(x)$与$P_n(x)$相应地为m和n次的互质的多项式.

解 若$P_n(x) = 0$在$[0,+\infty)$内有根x.并设其重数为$p(\geqslant 1)$,由于$P_m(x)$与$P_n(x)$互质,故x_0不是$P_m(x)$的根,从而有

$$\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)^p\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right] = a \neq 0,$$

由于$p \geqslant 1$,故积分发散,又

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x^{n-m}\cdot\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right) = b \neq 0$$

故当仅$n-m > 1$时,积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}\mathrm{d}x$收敛.

因此,当$P_n(x)$在$[0,+\infty)$内无根且$n > m+1$时积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}\mathrm{d}x$收敛.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性(2378 ~ 2383).

【2378】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

提示:$|\sin x|\geqslant\sin^2 x$.

解 由于对于任意 $x>1$

$$\left|\int_1^x \sin t dt\right|\leqslant 2,$$

且当 $x\to+\infty$ 时,$\frac{1}{x}$ 单调地趋于零,故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛,而 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$,即积分$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 是普通的定积分,故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

但当 $x>0$ 时,$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}$,

由 2368 题知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散.

故积分$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散.即原积分不是绝对收敛的.

【2379】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$.

解 设 $f(x)=\cos x, g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+100}$.

对于任意的 x

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|=\left|\int_0^x \cos t dt\right|\leqslant 2,$$

而 $$g'(x)=\frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2},$$

所以,当 $x>100$ 时,$g(x)$ 单调减少,且

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}=0,$$

故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$ 收敛,但它不绝对收敛.事实上由于

$$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\right| \geqslant \frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} - \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\right),$$

而 $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x+100} = 1,$$

故$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100}$发散.

和前面一样也可证明$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\mathrm{d}x$收敛,从而积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}$发散. 因此$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\mathrm{d}x$发散.

【2380】 $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\mathrm{d}x \quad (q \neq 0).$

解 设$t = x^q$,则$\mathrm{d}x = \frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}\mathrm{d}t$,于是

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\mathrm{d}x = \frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t.$$

因为$\lim\limits_{t\to+0}(t^{-\frac{p+1}{q}}\cdot t^{\frac{p+1}{q}-1}\cdot \sin t) = \lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1$,

故当且仅当$-\frac{p+1}{q} < 1$即$\frac{p+1}{q} > -1$时,积分$\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$收敛.

又被积函数在$[0,1]$上非负,故积分也绝对收敛.

下面考虑积分$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$.

如果$\frac{p+1}{q} < 1$,则对任意的$x > 1$,$\left|\int_1^x \sin t\mathrm{d}t\right| \leqslant 2$,$t^{\frac{p+1}{q}-1}$单调减少且$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} = 0$,故此时积分$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$收敛.

如果$\frac{p+1}{q} = 1$,则积分

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \sin t\mathrm{d}t$$

显然发散.

如果$\frac{p+1}{q}>1$,则由于$\lim\limits_{t\to+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}=+\infty$,故存在$A>0$,使得当$t>A$时,$t^{\frac{p+1}{q}-1}>\sqrt{2}$. 又对于$A>0$,存在自然数$N$. 使得当$n>N$时,$2n\pi+\frac{\pi}{4}>A$. 则

$$\left|\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|>\sqrt{2}\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1,$$

由柯西准则知积分$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$发散.

因此当且仅当$-1<\frac{p+1}{q}<1$时积分$\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$收敛.

下面我们讨论积分$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$的绝对收敛性. 分三种情况讨论

(1) 当$\frac{p+1}{q}<0$时,因为

$$|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t|\leqslant t^{\frac{p+1}{q}-1},$$

且$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\mathrm{d}t$收敛,所以此时积分$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$绝对收敛.

(2) 当$\frac{p+1}{q}=0$时,由于

$$\int_1^{+\infty}|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t|\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=+\infty,$$

此时积分不绝对收敛.

(3) 当$\frac{p+1}{q}>0$时,由于

$$\int_1^{+\infty}|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t|\mathrm{d}t\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=+\infty,$$

故此时积分也不绝对收敛.

综上所述,可得当且仅当$-1<\frac{p+1}{q}<1$时积分$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\mathrm{d}x$收敛. 而当$-1<\frac{p+1}{q}<0$时,积分绝对收敛.

【2380.1】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sec x)\mathrm{d}x$.

解 $x=\frac{\pi}{2}$ 为积分的奇点,而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{1}{2}}|\sin(\sec x)|=0,$$

故存在 $M>0$,使得

$$|\sin(\sec x)|<M\cdot\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{1}{2}}},$$

所以积分绝对收敛.

【2380.2】 $\int_0^{+\infty}x^2\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$.

解 设 $\mathrm{e}^x=t$,则 $x=\ln t,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$,所以

$$\int_0^{+\infty}x^2\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2t}{t}\cos t\mathrm{d}t,$$

对任意的 $A>1$,由于 $\left|\int_1^A\cos t\mathrm{d}t\right|\leqslant 2$ 且当 $t\to+\infty$ 时,$\frac{\ln^2t}{t}$ 单调地趋于零,故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2t}{t}\cos t\mathrm{d}t$ 收敛.但

$$\left|\frac{\ln^2t}{t}\cos t\right|\geqslant\frac{\cos^2t}{t},$$

利用 2368 题类似地方法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2t}{t}\mathrm{d}t$ 发散.所以积分 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\ln^2t}{t}\cos t\right|\mathrm{d}t$ 发散.

因此积分 $\int_0^{+\infty}x^2\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ 收敛,但不绝对收敛.

【2381】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x\quad(q\geqslant 0)$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x,$

而 $$\lim_{x\to+0}\left(x^{-p-1}\cdot\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+x^q}\right)=1,$$

故当且仅当 $-p-1<1$ 即 $p>-2$ 时积分 $\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛,且是绝对收敛的.

下面讨论积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

(1) 若 $p\geqslant q$,则

$$\frac{x^p}{1+x^q}\geqslant\frac{x^q}{1+x^q}\longrightarrow 1\quad(\text{当 } x\to+\infty \text{ 时}),$$

因此存在 $A>0$,使得,当 $x>A$ 时,恒有

$$\frac{x^p}{1+x^q}>\frac{1}{2},$$

对于 $A>0$,存在自然数 N,使得当 $n>N$ 时

$$2n\pi+\frac{\pi}{4}>A,$$

因而有 $$\left|\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x^p}{1+x^q}\sin x\mathrm{d}x\right|>\frac{1}{2}\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

由柯西准则,知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 若 $p<q-1$,取 $\tau>0$,充分小使 $p+\tau<q-1$,即 $q-p-\tau>1$. 而

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{q-p-\tau}\cdot\frac{x^p}{1+x^q}|\sin x|\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^q}{1+x^q}\cdot\frac{|\sin x|}{x^\tau}=0$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(3) 设 $q-1\leqslant p<q$,

此时 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 发散,事实上,可取 $A>1$,使得当 $x>A$ 时 $\frac{x^{p+1}}{1+x^q}>\frac{1}{2}$. 故

$$\int_A^{+\infty}\frac{x^p\cdot|\sin x|}{1+x^q}\mathrm{d}x=\int_A^{+\infty}\frac{x^{p+1}}{1+x^q}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\int_A^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=+\infty,$$

从而$\int_1^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}\mathrm{d}x$发散.再证$\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$收敛.事实上若$q=0$,则$-1\leqslant p<0$,此时积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}x^p\sin x\mathrm{d}x,$$

显然收敛.若$q>0$,由于

$$\left(\frac{x^p}{1+x^q}\right)'=\frac{x^{p-1}[p-(q-p)x^q]}{(1+x^q)^2}<0.$$

(当x充分大时)即$\frac{x^p}{1+x^q}$单调减少.又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}=0,$$

而 $\left|\int_1^x\sin t\mathrm{d}t\right|\leqslant 2$,故积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}\sin x\mathrm{d}x$收敛.

综上所述:有当$p>-2,q>p+1$时,积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$绝对收敛,当$p>-2,p<q\leqslant p+1$时,积分条件收敛.

【2382】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x.$

解 当$n\leqslant 0$时,积分显然是发散的.

当$n>0$时,首先考虑$\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x$ $(a>1)$.由于

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x,$$

而
$$\left|\int_a^x\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)dt\right|$$
$$=\left|\cos\left(a+\frac{1}{a}\right)-\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant 2,$$
又当 x 充分大时
$$\left[x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]'=nx^{n-3}\left(x^2-\frac{n-2}{n}\right)>0,$$
即当 x 充分大时，函数 $x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ 是增加的. 从而 $\dfrac{1}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$ 是单调减少的，又
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=0,$$
由此可知，当 $n>0$ 时积分 $\int_a^{+\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ 收敛.

再讨论积分
$$\int_0^{a'}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx\qquad(0<a'<1),$$
设　$x=\dfrac{1}{t}$，则
$$\int_0^{a'}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx=\int_{\frac{1}{a'}}^{+\infty}\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{2-n}}dt.$$
由前面的讨论知，当且仅当 $2-n>0$ 即 $n<2$ 时，此积分收敛，而 $\int_{a'}^{a}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ 是通常的定积分. 因此，当 $0<n<2$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ 收敛.

但积分不绝对收敛. 事实上

$$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} \geqslant \frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}$$

$$= \frac{1-\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{2x^n},$$

而当 $0 < n \leqslant 1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ 发散和前面同样的证明知 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛. 故此时 $\int_a^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}\mathrm{d}x$ 发散. 从而当 $0 < n \leqslant 1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $1 < n < 2$ 时，作变换 $x = \frac{1}{t}$，则

$$\int_0^{a'} \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)\right|}{t^{2-n}}\mathrm{d}t.$$

由前面的讨论知，当 $0 < 2-n \leqslant 1$ 即 $1 \leqslant n < 2$ 时积分 $\int_0^{a'} \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}\mathrm{d}x$ 发散，从而 $\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述：当 $0 < n < 2$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

【2383】 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$，

其中 $P_m(x)$ 与 $P_n(x)$ 为整数多项式；且若 $x \geqslant a \geqslant 0, P_n(x) > 0$.

解 设

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m,$$

$$P_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

其中 m,n 为非负整数，$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$

(1) 若 $n > m+1$,即 $n = m+k$,其中 $k \geqslant 2$ 为正整数,而

$$\lim_{x\to+\infty} x^k \cdot \left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right| = \frac{a_0}{b_0} \neq 0,$$

所以 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|\mathrm{d}x$ 收敛,又

$\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right| \leqslant \left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|$,所以此时积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$$

绝对收敛.

(2) $n = m+1$ 时 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\mathrm{d}x$ 条件收敛,事实上,因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xP_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_0}{b_0},$$

故存在 $A > a$,使得当 $x \geqslant A$ 时

$$\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right| > \frac{|a_0|}{2|b_0|},$$

于是

$$\int_A^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|\mathrm{d}x = \int_A^{+\infty}\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right|\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$$
$$\geqslant \frac{|a_0|}{2|b_0|}\int_A^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$$
$$= +\infty,$$

故 $\int_a^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|\mathrm{d}x$ 发散. 此外

$$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'$$
$$= \frac{1}{P_n(x)^2}\{-a_0b_0x^{2m} - 2a_1b_0x^{2m-1} + \cdots(a_{m-1}b_{m+1} - a_mb_m)\}.$$

故若 $a_0b_0 > 0$,则当 x 充分大时

$$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)' < 0,$$

函数 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 减少,若 $a_0b_0 < 0$,则当 x 充分大时

$$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)' > 0,$$

函数$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$增加. 总之,当 $x \to +\infty$ 时,$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$单调趋于零. 又

$$\left|\int_a^x \sin t\mathrm{d}t\right| \leqslant 2,$$

故积分$\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 若 $n < m+1$. 由于 n,m 均为非负整数,故 $n \leqslant m$,因此

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & 若\ m = n, \\ +\infty & 若\ n < m, a_0b_0 > 0, \\ -\infty & 若\ n < m, a_0b_0 < 0, \end{cases}$$

总之,存在 $A > a$ 及 $\tau > 0$,使得当 $x > A$ 时,$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} > \tau$ 或 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} < -\tau$.

对于 $A > a$,存在自然数 N,使得当 $n > N$ 时,$2n\pi + \frac{\pi}{4} > A$,

则
$$\left|\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x\right| > \tau\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\tau,$$

由柯西准则知,积分$\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述,我们有$\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$,当 $n > m+1$ 时,绝对收敛.

当 $n = m+1$ 时,条件收敛,当 $n < m+1$ 时发散.

【2384】 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则当 $x \to +\infty$ 时是否一定有 $f(x) \to 0$?

研究例题:

(1) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$.

解 不一定,例如

(1) 积分$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$收敛. 事实上,它是 2380 题的特例:$p=0, q=2$.

但显然$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x^2)$不存在.

(2) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$收敛,事实上,对任何$A>0$,存在唯一的非负整数$n$,使$\sqrt{n}\leqslant A<\sqrt{n+1}$,当$\sqrt{k}\leqslant x<\sqrt{k+1}$时,$[x^2]=k$,于是

$$\begin{aligned}&\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}(-1)^k\mathrm{d}x+(-1)^n(A-\sqrt{n})\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}+(-1)^n(A-\sqrt{n}).\end{aligned}$$

根据变号级数的莱布尼兹判别法(参见级数部分)知

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^k\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$存在且为有限,设为$S$.

又显然 $$|(-1)^n(A-\sqrt{n})|<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to0\quad(n\to+\infty),$$

因此 $$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=1+S,$$

即积分$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$收敛,但显然$\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x^2]}$不存在.

【2384.1】 设当$x_0\leqslant x<+\infty$时,

$$f(x)\in C^{(1)}[x_0,+\infty),\qquad |f'(x)|<C,$$

而$\int_{x_0}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛. 证明:当$x\to+\infty$时,$f(x)\to0$.

提示:研究积分:$\int_{x_0}^{+\infty}f(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

证 因为$\int_{x_0}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛,而

$$|f(x)f'(x)|\leqslant C|f(x)|,$$

所以$\int_{x_0}^{+\infty}f(x)f'(x)\mathrm{d}x$绝对收敛,从而收敛. 而对任何$x>x_0$有

$$\int_{x_0}^{x}f(t)f'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f^2(t)\Big|_{x_0}^{x}=\frac{1}{2}f^2(x)-\frac{1}{2}f^2(x_0),$$

从而
$$\lim_{x\to+\infty}f^2(x)=\lim_{x\to+\infty}2\int_{x_0}^{x}f(t)f'(t)\mathrm{d}t+f^2(x_0)=2\int_{x_0}^{+\infty}f(x)f'(x)\mathrm{d}x+f^2(x_0),$$

记 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^2(x)=A$,

显然$A\geqslant 0$

下面证明$A=0$. 若$A>0$,则存在$R>x_0$,使得当$x>R$时

$$f^2(x)>\frac{A}{2}>0,$$

从而
$$|f(x)|>\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}},$$

则
$$\int_{R}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x>\int_{R}^{+\infty}\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x=+\infty,$$

这与$\int_{x_0}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛相矛盾,因此

$$\lim_{x\to+\infty}f^2(x)=0,$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

【2385】 在$[a,b]$内有定义的无界函数$f(x)$的收敛广义积分:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$能否看作是相应积分和$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi)\Delta x_i$的极限?其中$x_i\leqslant\xi\leqslant x_{i+1}$和$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

解 不能,因为若$c(a\leqslant c\leqslant b)$是瑕点,则对于$[a,b]$的任何

分法,不论其 $\max|\Delta x_i|$ 多么小,当分法确定后,设 $c\in[x_j,x_{j+1}]$,则总可以取 $\xi_j\in[x_j,x_{j+1}]$,使 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于任何预先给定的值. 因此 $\lim\limits_{\max|\Delta x_i|}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能为有限的值.

【2386】 设 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ ①

收敛且函数 $\varphi(x)$ 有界,则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{②}$$

一定收敛吗?列举相应的例题.

如果积分 ① 绝对收敛,那么能说说积分 ② 的收敛性吗?

解 不. 例如,由 2378 题知:积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,且 $\varphi(x)=\sin x$ 有界,但由 2368 题知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 是发散.

若积分(1) 绝对收敛,$\varphi(x)$ 有界,则积分(2) 一定绝对收敛. 事实上,设 $|\varphi(x)|\leqslant L$,则由

$$|f(x)\varphi(x)|\leqslant L|f(x)|,$$

及 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 的收敛性立得.

【2387】 证明,若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $f(x)$ 为单调函数,则

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

证 不妨设 $f(x)$ 单调减小,则当 $x\geqslant a$ 时 $f(x)\geqslant 0$,倘若不然,则存在点 $c\geqslant a$,使 $f(c)<0$,由于 $f(x)$ 单调减少,故当 $x\geqslant c$ 时,$f(x)\leqslant f(c)$,从而

$$\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_c^{+\infty}f(c)\mathrm{d}x=-\infty,$$

因此,积分 $\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散,这与积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛相矛盾. 即

$f(x)$ 是单调减少的非负函数,由于$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,

根据柯西准则,对任给的$\varepsilon>0$,总存在$A>a$,使得当$\frac{x}{2}>A$时,恒有

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

但
$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right|=\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\geqslant f(x)\,\frac{x}{2},$$

故当$x>2A$时$0\leqslant xf(x)<\varepsilon$,即

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0 \text{ 或 } f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

【2388】 令函数$f(x)$在$0<x\leqslant 1$区间为单调函数,且在$x=0$点的邻域内无界.

证明:若$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证 设函数$f(x)$在$(0,1]$上是单调下降,这时

$$\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty,$$

由于积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$存在,故将区间$[0,1]$ n等分,即得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x,$$

由于$f(x)$是单调下降的所以当$\frac{k}{n}\leqslant x\leqslant\frac{k+1}{n}$时

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{k}{n}\right),$$

从而
$$\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right),$$

故
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

另一方面有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

因此有 $0 \leqslant \int_0^1 f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}f(1).$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}f(1)\right] = 0$,

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调增加时,只需对函数为 $f(x)$ 应用上述结果即可得证.

【2389】 证明:若函数 $f(x)$ 在 $0 < x < a$ 区间单调,并且积分$\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则

$$\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

证 不妨设 $f(x)$ 在 $0 < x < a$ 内是单调减少的.若存在 $0 < \delta < a$,使得当 $0 < x < \delta$ 时 $f(x) \geqslant 0$,这时,当 $0 < x < \delta$ 时,有

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t \geqslant f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p \mathrm{d}t$$
$$= c_p x^{p+1} f(x) \geqslant 0,$$

其中

$$c_p = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{p+1}}{p+1} & \text{当 } p \neq -1 \text{ 时}, \\ \ln 2 & \text{当 } p = -1 \text{ 时}, \end{cases}$$

由于$\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 存在,知

$$\lim_{x\to+0}\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

从而 $$\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x) = 0,$$

若不存在上述 $\delta > 0$,于是由 $f(x)$ 的递减性,有当 $0 < x < a$ 时,恒有 $f(x) < 0$,于是,当 $0 < x < \frac{a}{2}$ 时,有

$$\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t < f(x)\int_x^{2x} t^p \mathrm{d}t = B_p x^{p+1} f(x) < 0$$

其中

$$B_p = \begin{cases} \dfrac{2^{p+1}-1}{p+1} & \text{当 } p \neq -1 \text{ 时,} \\ \ln 2 & \text{当 } p = -1 \text{ 时,} \end{cases}$$

于是 $$|x^{p+1}f(x)| < \frac{1}{B_p}\left|\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t\right|.$$

根据$\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 的存在性,知

$$\lim_{x\to+0}\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

因此 $$\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

【2390】 证明:

(1) $V \cdot P \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$;

(2) $V \cdot P \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = 0$;

(3) $V \cdot P \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \mathrm{d}x = 0$.

证 (1) 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = 0,$$

所以 $$V.P.\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x} = 0.$$

(2) 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} + \int_{1+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon}\right| = 0,$$

所以 $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}=0.$

(3) 由于

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\sin x dx=\lim_{R\to+\infty}(-\cos R+\cos R)=0,$$

所以 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx=0.$

【2391】 证明:当 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$ 时

存在 $\mathrm{li}x=V\cdot P\cdot\int_0^x\frac{d\xi}{\ln\xi},$

证 当 $0\leqslant x<1$ 时,由于

$$\lim_{\xi\to+0}\frac{1}{\ln\xi}=0.$$

故补充定义被积函数在 $x=0$ 处的函数值为 0 后,被积函数成为 $[0,x]$ 上的连续函数,于是积分 $\int_0^x\frac{d\xi}{\ln\xi}$ 存在. 当 $x>1$ 时,利用具皮亚诺型余项的泰勒公式,有

$$\ln x=(x-1)+[\alpha(x)-1]\frac{(x-1)^2}{2},$$

其中 $\lim\limits_{x\to1}\alpha(x)=0$. 由此即得

$$\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}[\alpha(x)-1]}{1+\frac{[\alpha(x)-1]}{2}(x-1)}.$$

而上述等式右边第二项在 $x=1$ 附近有界,且连续,故可积. 而

$$V.P.\int_0^x\frac{d\xi}{\xi-1}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d\xi}{\xi-1}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{d\xi}{\xi-1}\right)$$
$$=\ln(x-1),$$

因此,当 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$ 时,$li x$ 存在.

求出下列积分(2392 ~ 2395).

【2392】 $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}.$

解 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-3x+2}+\int_{1+\varepsilon}^{2-\eta}\frac{dx}{x^2-3x+2}+\int_{2+\eta}^{b}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}-\ln2+\ln\frac{\eta}{1-\eta}-\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right|-\ln\frac{\eta}{1+\eta}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}-\ln2+\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)$$

$$=-\ln2,$$

所以 $\quad V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=-\ln2.$

【2393】 $V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}.$

解 因为

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\ln x}+\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}[\ln|\ln(1-\varepsilon)|-\ln(\ln2)+\ln(\ln2)$$

$$-\ln|\ln(1+\varepsilon)|]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|$$

$$=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{-1}{1-\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right|=\ln1=0,$$

所以 $\quad V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=0.$

【2394】 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx.$

解 因为

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{1+x}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan b - \arctan(-b) + \frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right] = 2\lim_{b\to+\infty}\arctan b = \pi,$$

所以 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi.$

【2395】 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}x.$

解 因为

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\arctan x\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\bigg|_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[b\arctan b - \frac{1}{2}\ln(1+b^2) - (-b)\arctan(-b)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right] = 0,$$

所以 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}x = 0.$

§5. 面积的计算方法

1. **直角坐标系中的面积** 由两条连续曲线 $y = y_1(x)$ 与 $y = y_2(x)[y_2(x) \geqslant y_1(x)]$ 及两条直线 $x = a$ 与 $x = b(a < b)$ 所围的平面图形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积 S(图 10)：

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x.$$

2. **参数方程表示的曲线所围成图形的面积** 若 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$[0 \leqslant t \leqslant T]$ 是逐段平滑的简单封闭曲线 C 的参数方程式，该曲线逆时针方向运行并在它左侧所围面积为 S 的图形(图 11)，那么

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)\mathrm{d}t = \int_0^T x(t)y'(t)\mathrm{d}t,$$

或 $$S = \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\mathrm{d}t.$$

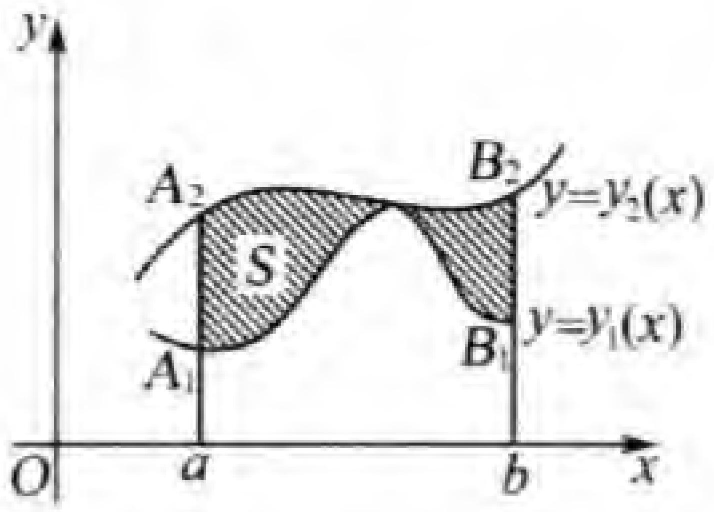


图 10

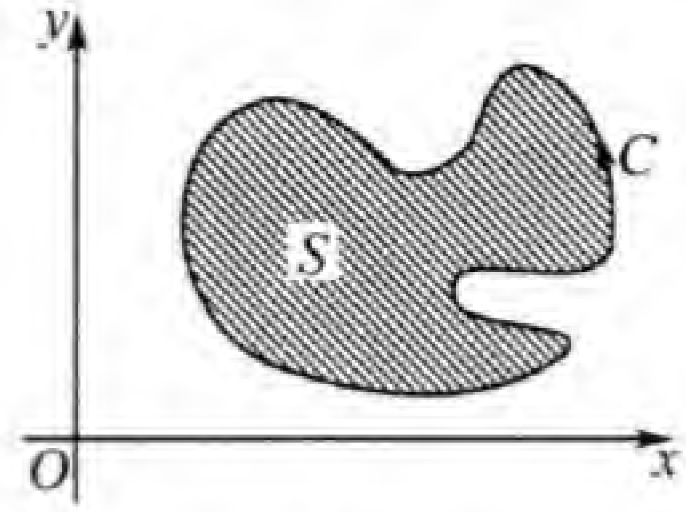


图 11

3. **极坐标系中的面积**　由连续曲线 $r=r(\varphi)$ 和两条射线 $\varphi=\alpha$ 和 $\varphi=\beta(\alpha<\beta)$ 所围的扇形 OAB 面积 S 等于(图 12)

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^{2}(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

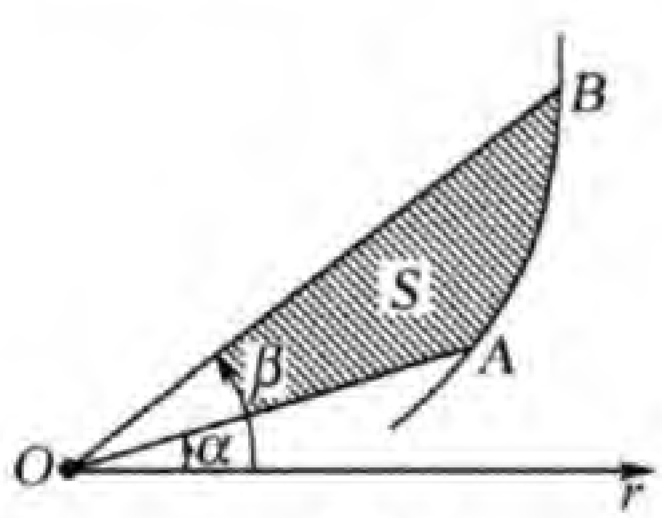


图 12

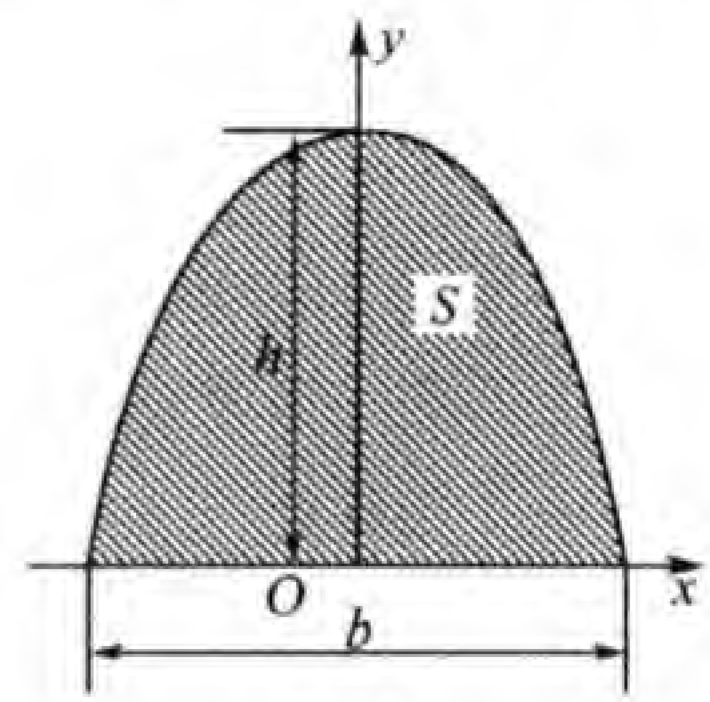
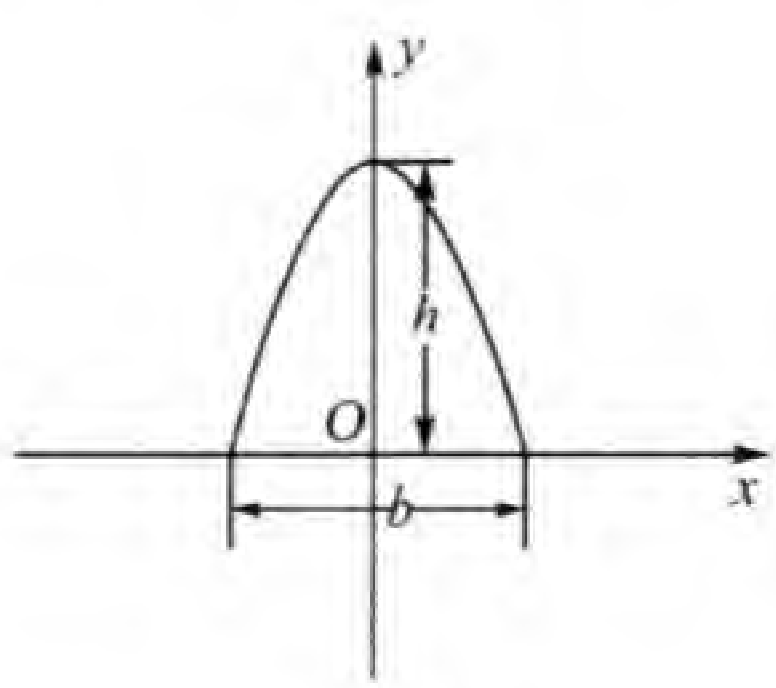


图 13

【2396】　证明:正抛物线拱的面积等于 $S=\frac{2}{3}bh$,

其中,b 表示底,h 表示段高.

解　建立 2396 题如图所示的坐标系. 设抛物线的方程为 $y=Ax^{2}+Bx+C$,



2396 题图

则当 $x=\pm\dfrac{b}{2}$ 时，得

$$y=\frac{Ab^2}{4}\pm\frac{B6}{2}+C=0,$$

当 $x=0$ 时，得 $y=C=h$

解之得　$A=-\dfrac{4h}{b^2}, B=0, C=h$. 从而方程为

$$y=-\frac{4h}{b^2}+h.$$

于是所求面积为

$$S=2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{4h}{b^2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\left(hx-\frac{4h}{3b^2}x^3\right)\Big|_0^{\frac{b}{2}}=\frac{2}{3}bh.$$

求出由给定直角坐标曲线围成的图形的面积[①](2397 ~ 2410).

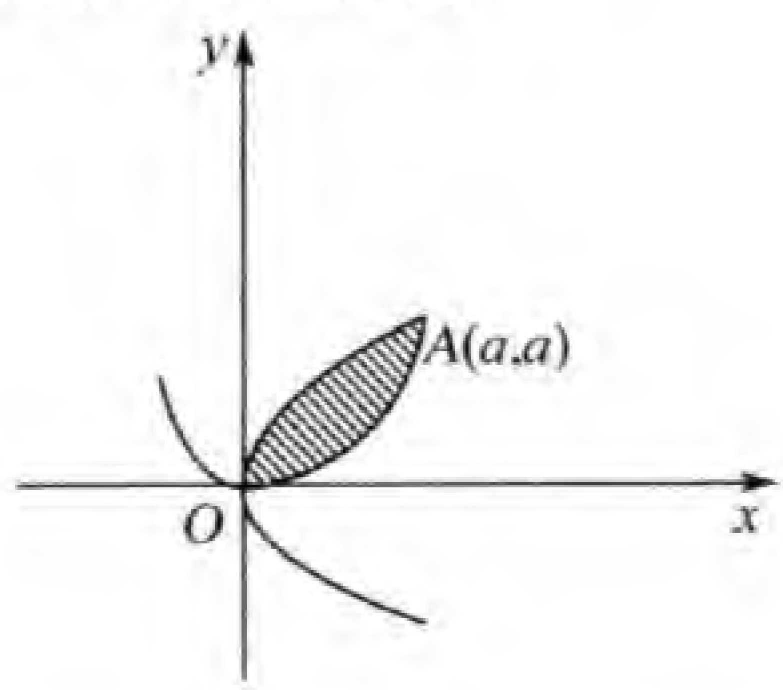
【2397】　$ax=y^2, ay=x^2$.

解　解方程组

$$\begin{cases}ax=y^2,\\ ay=x^2,\end{cases}$$

可得两曲线的交点为 $O(0,0)$，$A(a,a)$.

如 2397 题图所示. 所求面积为



2397 题图

① 所有参数在这里和第 4 章各节中均为正数

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x$$

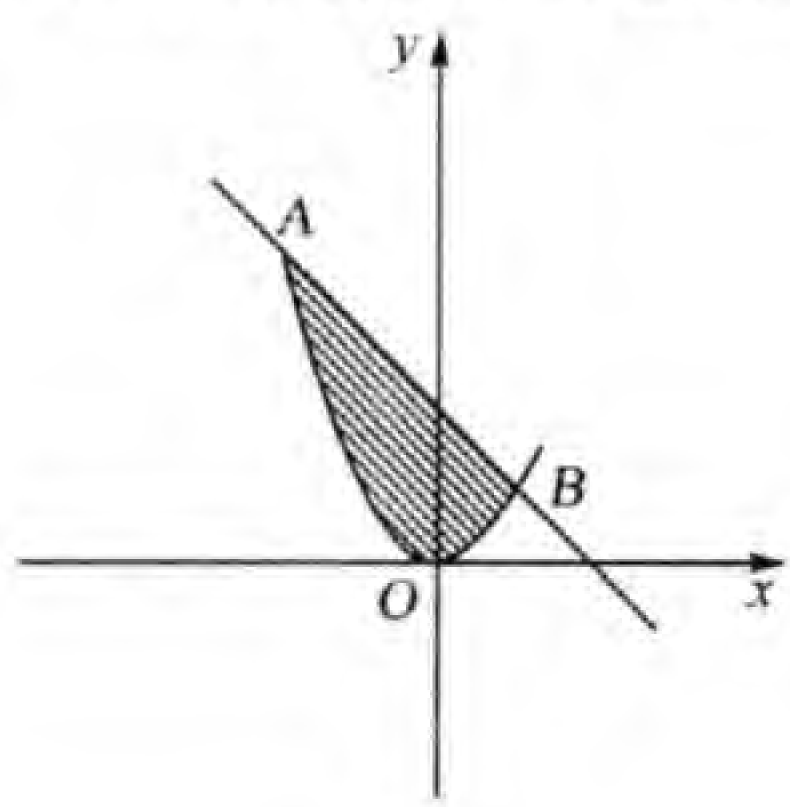
$$=\left[\frac{2\sqrt{a}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3a}x^3\right]\Big|_0^a=\frac{a^2}{3}.$$

【2398】 $y=x^2, x+y=2.$

解 解方程组

$$\begin{cases}y=x^2,\\x+y=2,\end{cases}$$

得两曲线的交点为 $A(-2,4)$ 及 $B(1,1)$ 如 2398 题图所示. 所求面积为



2398 题图

$$S=\int_{-2}^1[(2-x)-x^2]\mathrm{d}x$$

$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^1=4\frac{1}{2}.$$

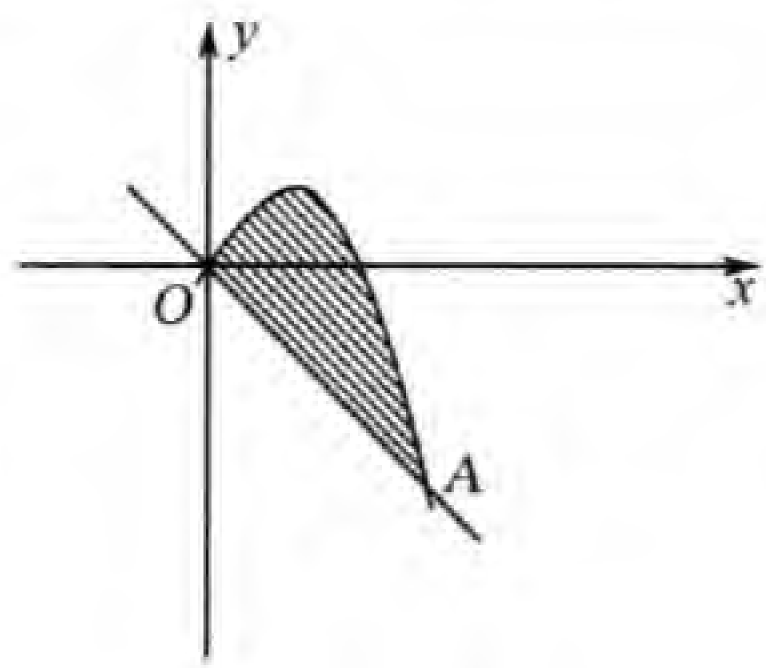
【2399】 $y=2x-x^2, x+y=0.$

解 解方程组

$$\begin{cases}y=2x-x^2,\\x+y=0,\end{cases}$$

得两曲线的交点为 $A(3,-3)$ 及 $O(0,0)$, 如 2399 题图所示.
所求面积为

$$S=\int_{0,1}^3[(2x-x^2)-(-x)]\mathrm{d}x$$

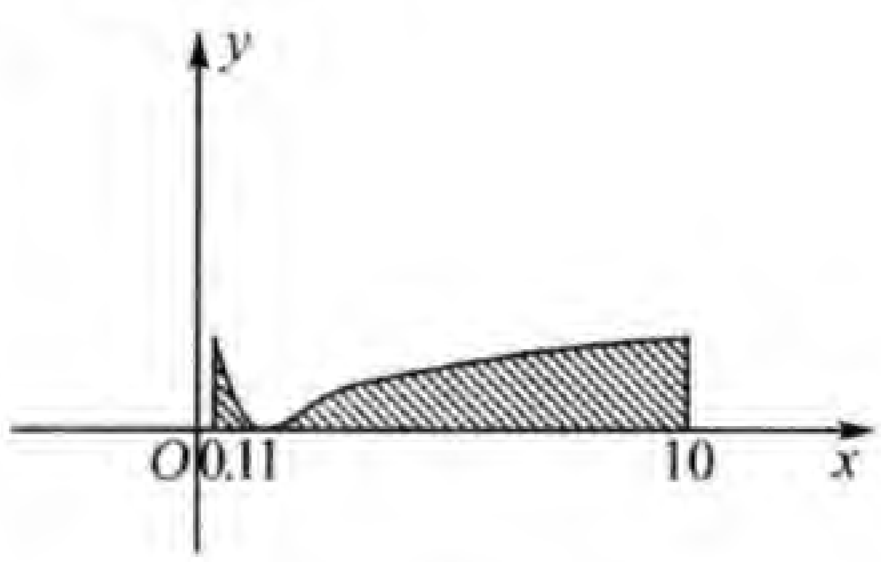


2399 题图

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3 = 4\frac{1}{2}.$$

【2400】 $y = |\lg x|, y = 0, x = 0.1, x = 10.$

解　如 2400 题图所示



2400 题图

$$S = -\int_{0.1}^{1} \lg x \mathrm{d}x + \int_{1}^{10} \lg x \mathrm{d}x$$

$$= (-x\lg x + x\lg e)\Big|_{0.1}^{1} + (x\lg x - x\lg e)\Big|_{1}^{10}$$

$$= 9.9 - 8.1\lg e.$$

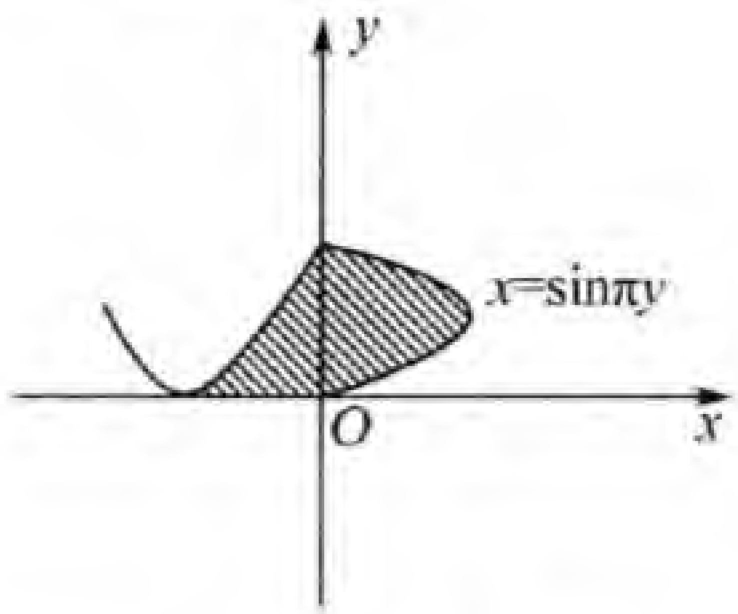
【2400.1】 $y = 2^x, y = 2, x = 0.$

解　$S = \int_1^2 \log_2 y \mathrm{d}y = \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \ln y \mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{\ln 2}[y\ln y - y]\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{\ln 2}.$$

【2400.2】 $y = (x+1)^2, x = \sin \pi y, y = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant 1).$

解 如 2400.2 题图所示



2400.2 题图

所求面积为

$$S=\int_0^1[\sin\pi y-(-1+\sqrt{y})]\mathrm{d}y$$

$$=\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi y+y-\frac{3}{2}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}.$$

【2401】 $y=x$；$y=x+\sin^2x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 所求面积为

$$S=\int_0^{\pi}(x+\sin^2x-x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

【2402】 $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$，$y=0$.

解 所求面积为

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=a^3\cdot\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi a^2.$$

【2403】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

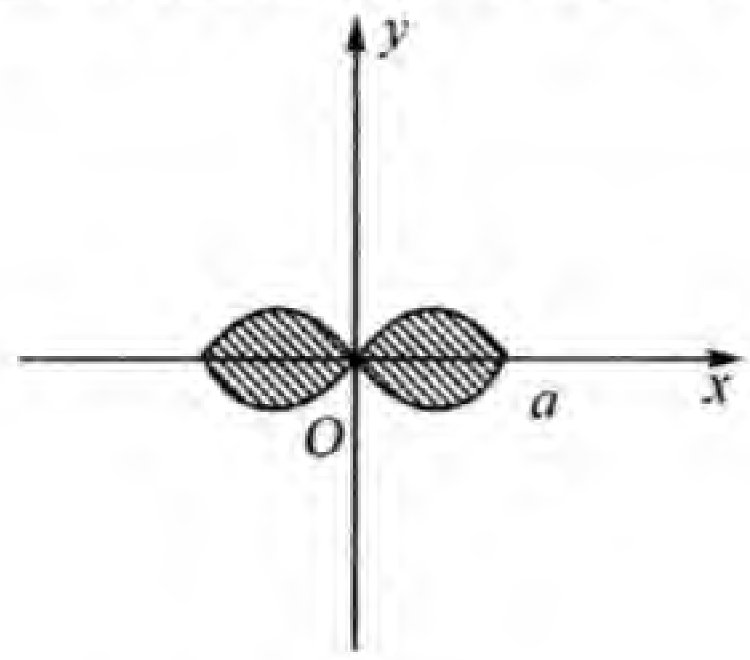
解 所求面积为

$$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=4\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a=\pi ab.$$

【2404】 $y^2=x^2(a^2-x^2)$.

解 如 2404 题图所求图形关于原点对称. 所求面积为



2404 题图

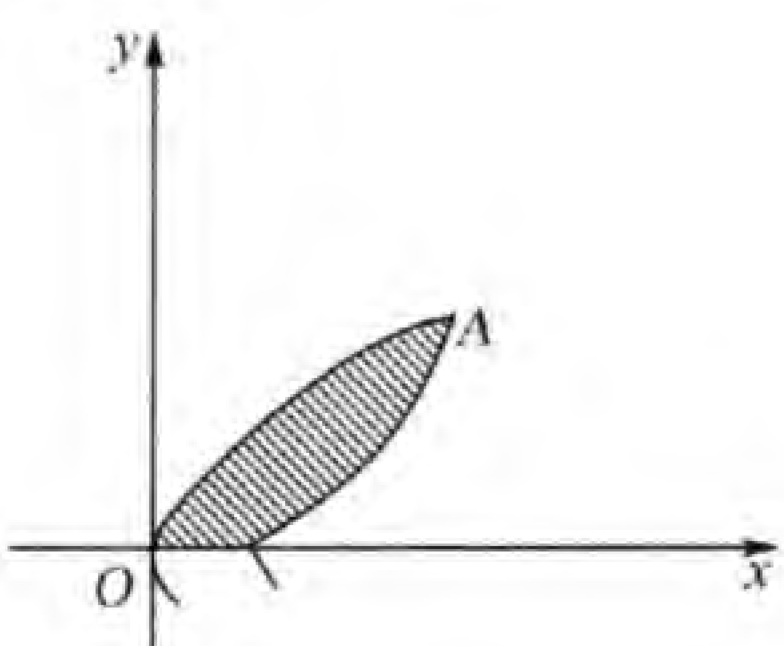
$$S = 4\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= -\frac{4}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{4}{3}a^3.$$

【2405】 $y^2 = 2px$, $27py^2 = 8(x - p)^3$.

解 曲线 $l_1: y^2 = 2px$ 与曲线 $l_2: 27py^2 = 8(x-p)^3$ 在第一象限内的交点为 $A(4p, 2\sqrt{2}p)$ 且图形关于 Ox 轴对称.

如 2405 题图所示.



2405 题图

所求面积为

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{2}p}\left[\left(p + \frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{2p}y^2\right]dy$$

$$= 2\left(py + \frac{9}{10}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6p}y^3\right)\Big|_0^{2\sqrt{2}p} = \frac{88}{15}\sqrt{2}p^2.$$

【2406】 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ $(A > 1, AC - B^2 > 0)$.

解 解此方程得

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2-1)}}{C},$$

$$y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2-1)}}{C},$$

函数的定义域为

$$B^2x^2 - C(Ax^2-1) \geqslant 0,$$

即 $$|x| \leqslant \sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}.$$

设 $$a = \sqrt{\frac{C}{AC-B^2}},$$

则所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^{a}(y_2 - y_1)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{C}\int_{-a}^{a}\sqrt{C-(AC-B^2)x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\frac{\pi}{2}a^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}. \end{aligned}$$

【2407】 $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$(蔓叶线),$x = 2a$.

解 所求面积为

$$S = 2\int_0^{2a} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x.$$

设 $$t = \sqrt{\frac{x}{2a-x}},$$

则当 $0 \leqslant x < 2a$ 时 $0 \leqslant t < +\infty$,

$$x = \frac{2at^2}{t^2+1}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{4at}{(t^2+1)^2},$$

代入并利用 1921 题的结果,可得

$$S = 2\int_0^{2a} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x = 16a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{(t^2+1)^3}\mathrm{d}t$$

$$= 16a^2 \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left[\frac{1}{t^2+1}-\frac{2}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{(t^2+1)^3}\right]dt$$

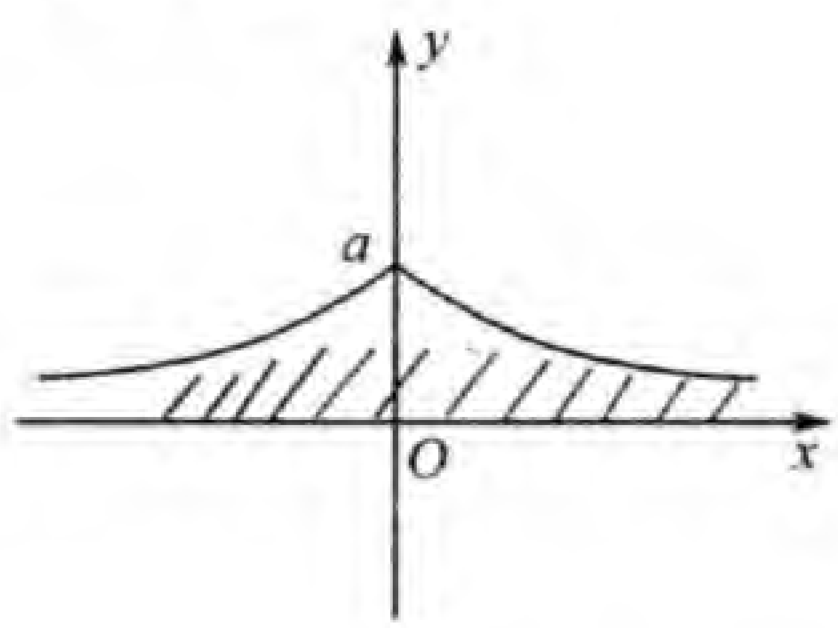
$$= 16a^2 \lim_{b\to+\infty}\left\{\left(\frac{3}{8}\arctan t-\frac{5t}{8(t^2+1)}+\frac{t}{4(t^2+1)^2}\right)\Big|_0^b\right\}$$

$$= 3\pi a^2.$$

【2408】 $x = a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$，

$y=0$ （等切面曲线）.

解 如 2408 题图所示



2408 题图

所求面积为

$$S = 2\int_0^a\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)dy$$

$$= 2a\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy$$

$$-2\left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$= 2a\lim_{\varepsilon\to+0}\left(y\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}+a\arcsin\frac{y}{a}\right)\Big|_\varepsilon^a-\frac{\pi a^2}{2}$$

$$= \pi a^2-\frac{\pi a^2}{2}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

【2409】 $y^2=\dfrac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}$ $(x>0;n>-2)$.

解 所求面积为

$$S=2\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}}\mathrm{d}x.$$

设 $t=x^{\frac{n+2}{2}}$,则

$$S=2\int_0^{+\infty}\frac{2}{n+2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$=\frac{4}{n+2}\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\pi}{n+2}.$$

【2410】 $y=\mathrm{e}^{-x}\,|\sin x|$, $\quad y=0\quad(x\geqslant 0)$.

解 令 $\sin x=0$ 得

$$x=k\pi\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

当 $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 时,$\sin x>0$,

当 $x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$ 时,$\sin x<0$.

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-1)^k\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{-\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)}{2}\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi-\mathrm{e}^{-k\pi}\cos k\pi)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}+\mathrm{e}^{-k\pi}]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+2\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-k\pi}\right)+\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}\right\}$$

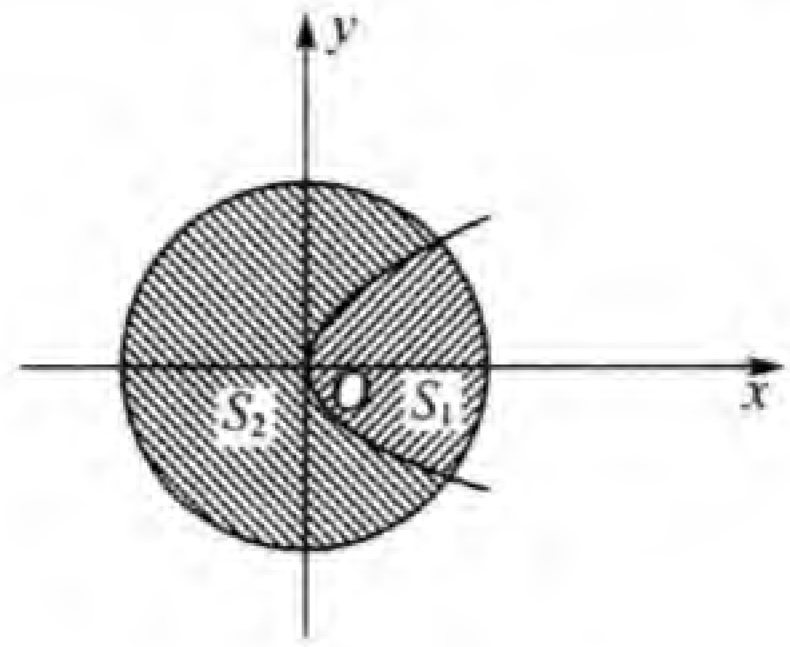
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+2\mathrm{e}^{-\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}+\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}=\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}.$$

【2411】 抛物线 $y^2=2x$ 分圆 $x^2+y^2=8$ 的面积为两部分,这两部分的比是多少?

解 如2411题图所示.两曲线在第一象限内的交点为 $A(2,2)$ 设这两部分的面积分别为 S_1 及 S_2,则有

$$S_1=2\int_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$



2411 题图

$$= 2\left(\frac{y}{2}\sqrt{8-y^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{2}}-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi+\frac{4}{3},$$

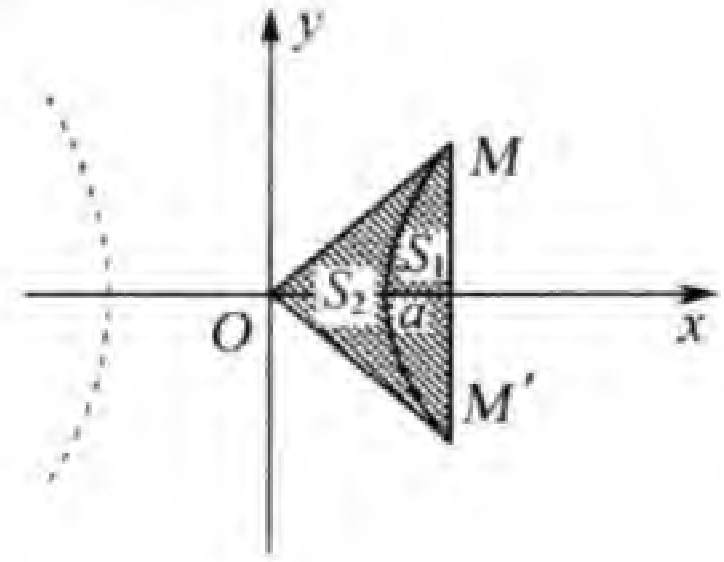
$$S_2 = 8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

所以,它们的比为

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi+\dfrac{4}{3}}{6\pi-\dfrac{4}{3}}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}.$$

【2412】 把双曲线 $x^2-y^2=1$ 上点 $M(x,y)$ 的坐标表示成为双曲线弧 $M'M$ 和两根射线 OM 和 OM' 限制的双曲线扇形面积的函数 $S=OM'M$,这里 $M'(x,-y)$ 为 M 关于轴 Ox 对称的点.

解 如 2412 题图所示



2412 题图

记 S_1 为双曲线与直线 $x=x_m$ 所围图形的面积,则有

$$S_1 = 2\int_a^x \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]\Bigg|_a^x$$

$$= xy - a^2\ln\frac{x+y}{a},$$

所以 $\quad S = xy - S_1 = a^2\ln\frac{x+y}{a}$. 从而

$$x + y = ae^{\frac{S}{a^2}}, \qquad ①$$

将 ① 代入 $x^2 - y^2 = a^2$ 中得

$$x - y = ae^{-\frac{S}{a^2}}, \qquad ②$$

因此

$$x = a\frac{e^{\frac{S}{a^2}} + e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a\operatorname{ch}\frac{S}{a^2},$$

$$y = a\frac{e^{\frac{S}{a^2}} - e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a\operatorname{sh}\frac{S}{a^2}.$$

求出由给定参数曲线围成的图形的面积(2413 ~ 2417).

【2413】 $x = a(t - \sin t), y = a(1-\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$(摆线)和 $y = 0$.

解 所求面积为

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

【2414】 $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$.

解 当 $t = 0$ 及 2 时,$x = 0, y = 0$,

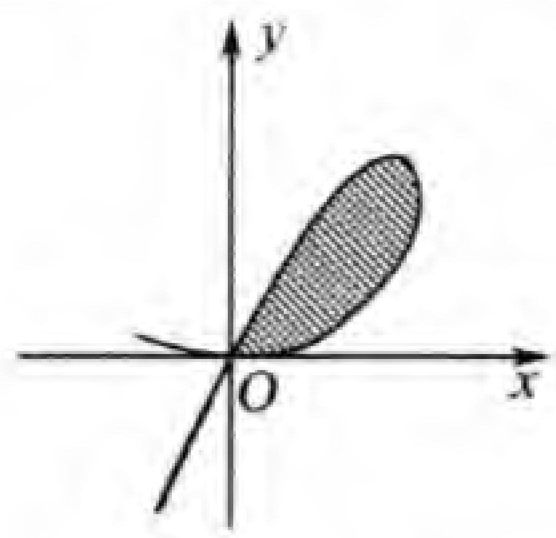
当 $0 < t < 2$ 时 $x > 0, y > 0$,

当 $t > 2$ 时,$x < 0, y < 0$.

如 2414 题图所示

所求面积为

$$S = -\int_0^2 (2t^2 - t^3)2(1-t)\mathrm{d}t$$



2414 题图

$$=-2\int_0^2 (t^4-3t^3+2t^2)\mathrm{d}t=\frac{8}{15}.$$

【2415】 $x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$(圆的渐伸线)和 $x=a,y\leqslant 0$.

解 所求面积为

$$S=-\int_0^{2\pi} a(\sin t-t\cos t)\cdot at\cos t\mathrm{d}t-\int_{\overline{AB}} y\mathrm{d}x$$

$$=a^2\left(\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}-\int_{\overline{AB}} y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^2}{3}(4\pi^2+2\pi)-\int_{\overline{AB}} y\mathrm{d}x,$$

其中$\int_{\overline{AB}} y\mathrm{d}x$表示沿着从$A(a,-2\pi a)$到点$B(a,0)$的直线段$\overline{AB}$上的积分. 由于在$\overline{AB}$上$x\equiv a$,故$\mathrm{d}x=0$,从而

$$\int_{\overline{AB}} y\mathrm{d}x=0,$$

因此 $$S=\frac{a^2}{3}(4\pi^2+3\pi).$$

【2416】 $x=a(2\cos t-\cos 2t),y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

解 所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'_t-yx'_t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(2\cos t-\cos 2t)\cdot a(2\cos t-2\cos 2t)$$

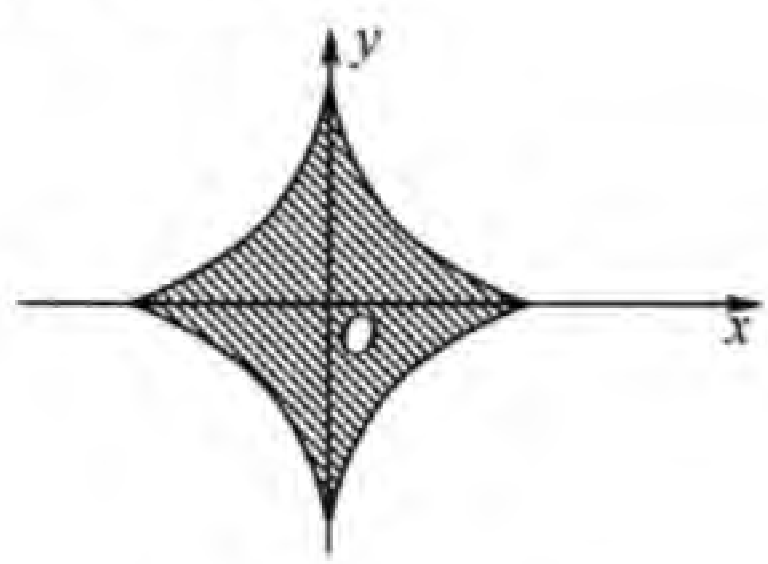
$$-a(2\sin t-\sin 2t)\cdot a(-2\sin t+2\sin 2t)]\mathrm{d}t$$

$$= 3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t)\mathrm{d}t$$

$$= 3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\mathrm{d}t = 6\pi a^2.$$

【2417】 $x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t, y=\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t(c^2=a^2-b^2)$(椭圆的渐屈线).

解 如 2417 题图所示



2417 题图

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c^2}{b}\sin^3 t\cdot\frac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t = \frac{3\pi c^4}{8ab}.$$

【2417.1】 $x=a\cos t, y=\dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

解 所求面积为

$$S = \int_0^{2\pi}\frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}(-a\sin t)\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi}\frac{a^2\sin^3 t}{2+\sin t}\mathrm{d}t$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t-2\sin t+4)\mathrm{d}t + a^2\int_0^{2\pi}\frac{8\mathrm{d}t}{2+\sin t}$$

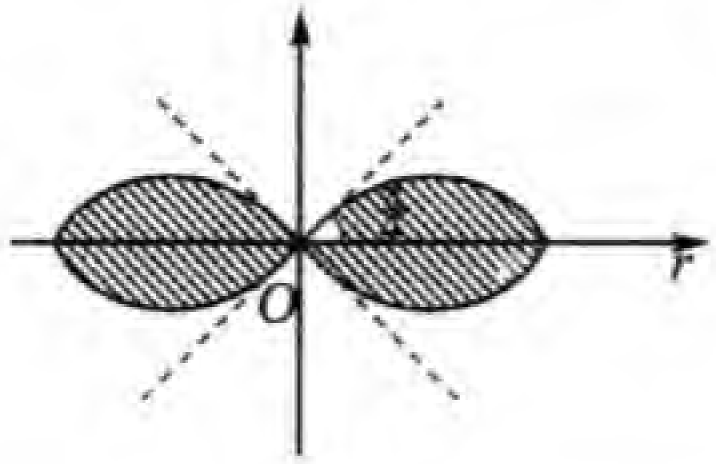
$$= \pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right).$$

求出由给定极坐标曲线围成的图形的面积(2418 ~ 2423).

【2418】 $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (双纽线)

解 如 2418 题图所示

所求面积为

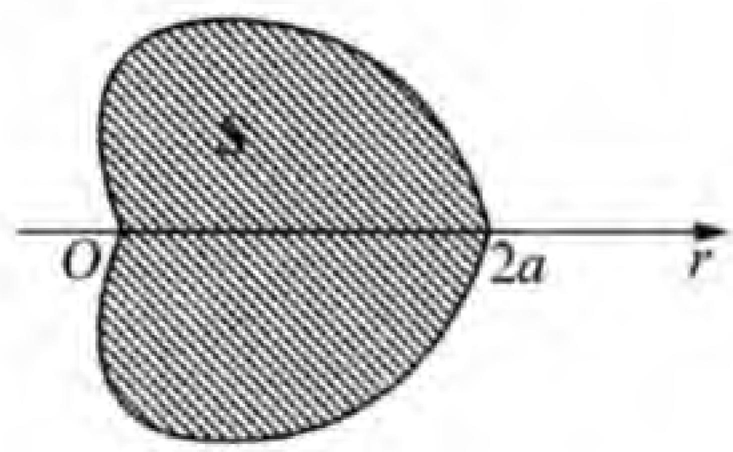


2418 题图

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi=2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

【2419】 $r=a(1+\cos\varphi)$. （心形线）

解　如 2419 题图所示



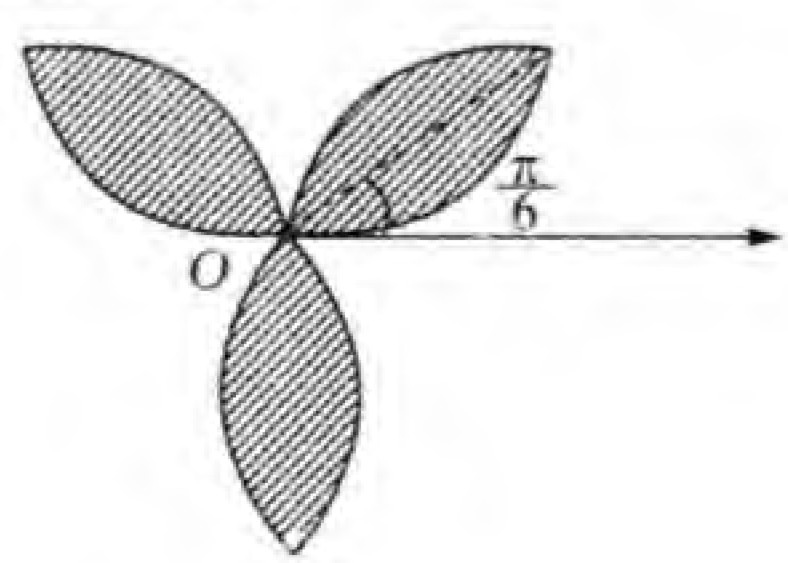
2419 题图

所求面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

【2420】 $r=a\sin3\varphi$. （三叶线）

解　如 2420 题图所示



2420 题图

所求面积为

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\sin^2 3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi a^2}{4}.$$

【2421】 $r=\dfrac{p}{1-\cos\varphi}$(抛物线)$\varphi=\dfrac{\pi}{4},\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

解 所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{p^2}{(1-\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^4\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\&=-\frac{p^2}{4}\left(\cot\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\cot^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3).\end{aligned}$$

【2422】 $r=\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\quad(0<\varepsilon<1)$(椭圆).

解 所求面积为

$$\begin{aligned}S&=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{p^2\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\\&=p^2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.\end{aligned}$$

设 $\tan\dfrac{\varphi}{2}=t$,并记$a=\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$,则有

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)}\\&=\int\frac{2(t^2+1)}{(1-\varepsilon)^2(r^2+a^2)}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^2}\\&=\frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\arctan\frac{t}{a}\\&\quad+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\left\{\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a}\right\}+C.\end{aligned}$$

当$0\leqslant\varphi<\pi$时$0\leqslant t<+\infty$,所以

$$S=p^2\Big[\frac{2}{(1-a)^2}\arctan\frac{t}{a}+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\Big\{\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}$$

$$+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a}\Big\}\Big]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\left\{\frac{\pi}{a(1-\varepsilon)^2}+\frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-\varepsilon)^2}\right\}\cdot p^2$$

$$=\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}.$$

【2422.1】 $r=3+2\cos\varphi$.

解　所求面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(3+2\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\pi}(9+12\cos\varphi+2(1+\cos2\varphi)\mathrm{d}\varphi=11\pi.$$

【2422.2】 $r=\frac{1}{\varphi},r=\frac{1}{\sin\varphi}\quad\left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

解　所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varphi}-\cot\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\right)=\frac{1}{\pi}.$$

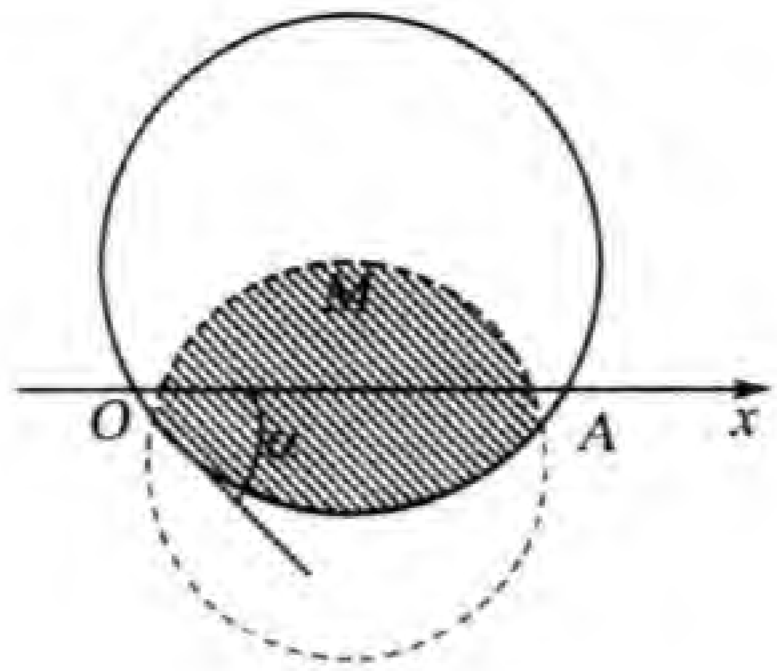
【2423】 $r=a\cos\varphi,r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)\quad\left(M\left(\frac{a}{2},0\right)\in S\right)$.

解　所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}a^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a^2(\pi-1)}{4}.$$

【2424】 求出由曲线 $\varphi=r\arctan r$ 及两根射线 $\varphi=0$ 与 $\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围的图形的面积.



2423 题图

解　当 φ 由 0 变到 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 时，r 从 0 变到 $\sqrt{3}$，而

$$d\varphi=\left(\frac{r}{1+r^2}+\arctan r\right)dr,$$

故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}r^2d\varphi\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{r^3}{1+r^2}+r^2\arctan r\right)dr\\&=\left[\frac{1}{6}r^2-\frac{1}{6}\ln(1+r^2)+\frac{1}{6}r^3\arctan r\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.\end{aligned}$$

【2424.1】　求出由曲线 $r^2+\varphi^2=1$ 所围的图形的面积.

解　所求面积为

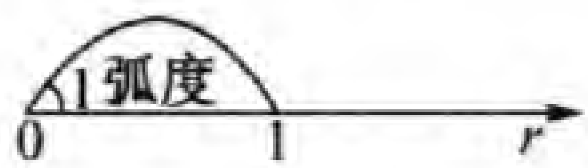
$$\begin{aligned}S&=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 r^2d\varphi=\int_0^1(1-\varphi^2)d\varphi\\&=\left(\varphi-\frac{1}{3}\varphi^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

【2424.2】　求出由蔓叶线所围的图形的面积：

$$\varphi=\sin(\pi r)\quad(0\leqslant r\leqslant 1)$$

解　如 2424.2 题图所示

当 $0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$ 时



2424.2 题图

$$r=\frac{\arcsin\varphi}{\pi}\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant1),$$

所求面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 r^2\mathrm{d}\varphi=\int_0^1\frac{\arcsin^2\varphi}{\pi^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\varphi\arcsin^2\varphi\Big|_0^1-\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}\cdot\arcsin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

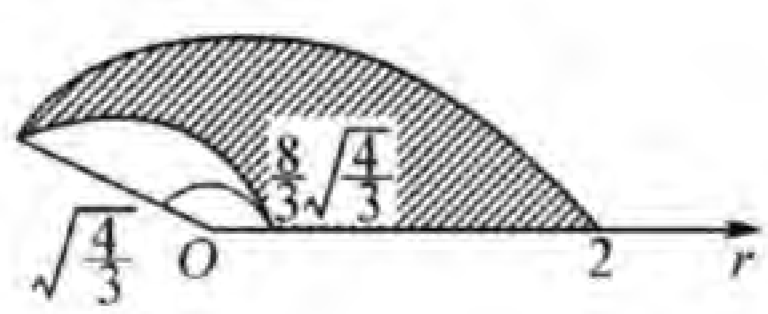
$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{\pi^2}\sqrt{1-\varphi^2}\arcsin\varphi\Big|_0^1-\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}.$$

【2424.3】 求出由以下曲线所围的图形的面积：

$\varphi=4r-r^3,\varphi=0.$

解 如 2424.3 题图所示



2424.3 题图

当 φ 从 0 增加到 $\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$ 时，r 从 0 增加到 $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

此时 $\mathrm{d}\varphi=(4-3r^2)\mathrm{d}r.$

当 φ 从 $\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$ 变化到 0 时，r 从 $\sqrt{\frac{4}{3}}$ 增加到 2.

此时 $\mathrm{d}\varphi=-(4-3r^2)\mathrm{d}r.$

因此，所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{4}{3}}}^{2}r^2(3r^2-4)\mathrm{d}r-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{4}{3}}}r^2(4-3r^2)\mathrm{d}r=\frac{32}{15}.$$

【2424.4】 求出由以下曲线所围的图形的面积：

$\varphi = r - \sin r, \varphi = \pi.$

解 当 r 从 0 变化为 π 时，φ 单调增加地变化到 π，且

$d\varphi = (1 - \cos r)dr,$

所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2(1-\cos r)dr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2 dr - \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\cos r dr \\ &= \frac{1}{6}r^3\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}r^2\sin r\Big|_0^\pi + \int_0^\pi r\sin r dr \\ &= \frac{1}{6}\pi^3 - r\cos r\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos r dr \\ &= \frac{1}{6}\pi^3 + \pi + \sin r\Big|_0^\pi = \frac{1}{6}\pi^3 + \pi. \end{aligned}$$

【2425】 求出由封闭曲线所围的图形的面积：

$r = \frac{2at}{1+t^2}, \varphi = \frac{\pi t}{1+t}.$

解 曲线封闭时，t 由 0 变到 $+\infty$，所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} r^2 d\varphi \\ &= 2\pi a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}dt \\ &= 2\pi a^2\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{4(1+t)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2}\frac{t}{(1+t^2)^2}\right]dt \\ &= 2\pi a^2\left[-\frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{4}\arctan t - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right]\Bigg|_0^{+\infty} \\ &= \pi a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

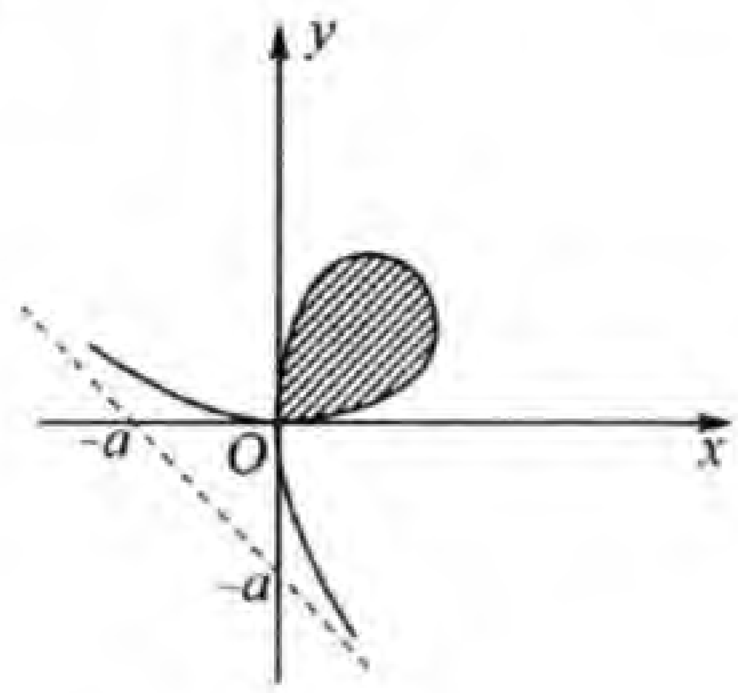
化为极坐标，求出由下列曲线所围的图形的面积(2426 ~ 2428).

【2426】 $x^3 + y^3 = 3axy$ (笛卡尔叶形线).

解 $r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi,$

所以 $$r=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}.$$

当 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$r\geqslant0$ 且当 $\varphi=0,\frac{\pi}{2}$ 时 $r=0$. 如 2426 题图所示，所求面积为



2426 题图

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi.$$

令 $\tan\varphi=t$,

则 $$S=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}$$
$$=\frac{9a^2}{2}\left[-\frac{1}{3(1+t^3)}\right]\Big|_0^{+\infty}$$
$$=\frac{3a^2}{2}.$$

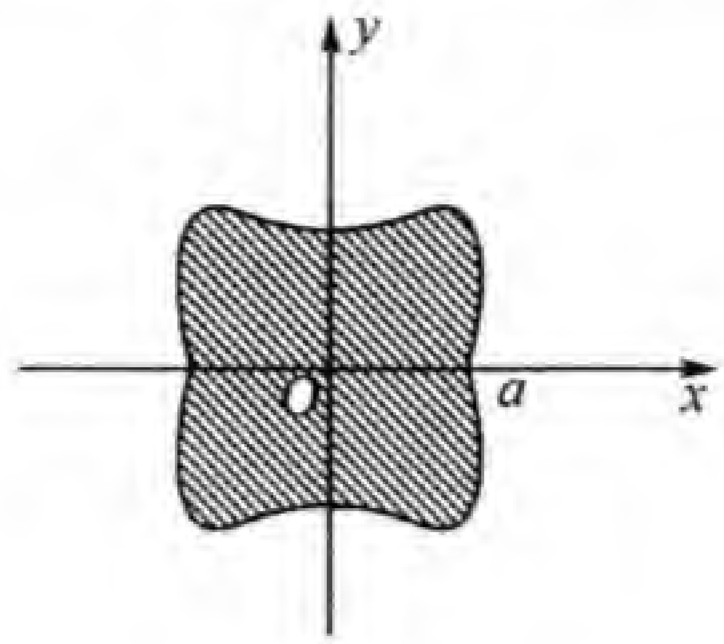
【2427】 $x^4+y^4=a^2\ (x^2+y^2)$.

解 $r^4(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)=a^2r^2$,

所以 $$r=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2-\sin^2 2\varphi}}.$$

如 2427 题图所示，由对称知所求面积为

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$
$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2-\sin^2 t}\mathrm{d}t$$



2427 题图

$$= \frac{2a^2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin t}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}a^2\left\{2\arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{t}{2}-1\right)\right.$$

$$\left.+2\arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{t}{2}+1\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

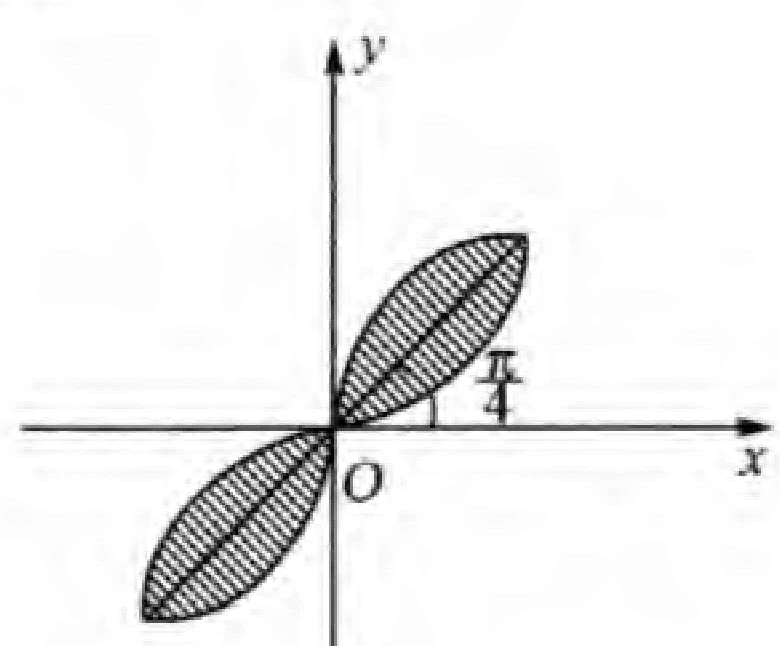
$$= 2\sqrt{2}a^2\left[\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}a^2\cdot\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}a^2\pi.$$

【2428】 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ （双纽线）.

解 $r^2 = a^2\sin 2\varphi$,

如 2428 题图所示



2428 题图

所求面积 $S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi = a^2$.

把方程式化解成参数形式，求出受下列曲线限制的图形的面积(2429 ～ 2430).

【2429】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ （星形线).

解 设

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t,$$

由对称性知

$$S = 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-3a^2\sin^4 t\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)\mathrm{d}t = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

【2430】 $x^4 + y^4 = ax^2 y$.

提示:假定 $y = tx$.

解 设 $y = tx$,则曲线的参数方程为

$$x = \frac{at}{1+t^4}, y = \frac{at^2}{1+t^4}, \quad (-\infty < t < \infty)$$

由对称性知,所求面积为

$$S = -\int_0^{+\infty} \frac{at}{1+t^4} \cdot \frac{2at(1-3t^4)}{(1+t^4)^2}\mathrm{d}t$$

$$= -2a^2\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t - 3\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t\right).$$

此题计算相当麻烦,我们这里略去. 有兴趣的同学可以尝试求解,所求面积为 $S = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}a^2$.

§6. 弧长的计算方法

1. **直角坐标系中的弧长** 平滑(连续可微分) 曲线 $y = y(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 一段弧的长度等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

2. **参数方程表示的曲线的弧长** 若曲线 C 由以下方程式给

出：$x = x(t)$，　$y = y(t)$　$(t_0 \leqslant t \leqslant T)$.
其中 $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$，则曲线 C 的弧长等于

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

3. **极坐标系中的弧长**　若

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta),$$

其中 $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$，则曲线相应的一段的弧长等于

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

空间曲线的弧长参见第八章.

求出下列曲线的弧长(2431 ~ 2452).

【2431】　$y = x^{\frac{3}{2}}$　$(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

解　所求弧长为

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$
$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

【2432】　$y^2 = 2px$　$(0 \leqslant x \leqslant x_0)$.

解　$y' = \dfrac{p}{y}$,

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = \frac{\sqrt{2x + p}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}},$$

由对称性知，所求弧长为

$$s = 2\int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{p + 2x}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

令　$\sqrt{2x} = t$，则当 $0 \leqslant x \leqslant x_0$ 时 $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2x_0}$，所以

$$s = 2\int_0^{\sqrt{2x_0}} \sqrt{p + t^2}\,dt$$
$$= 2\left[\frac{t}{2}\sqrt{p + t^2} + \frac{p}{2}\ln|t + \sqrt{p + t^2}|\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2x_0}}$$
$$= \sqrt{2x_0}\sqrt{p + 2x_0} + p\ln\left(\frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p + 2x_0}}{\sqrt{p}}\right).$$

【2433】 $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 从 $A(0,a)$ 点到 $B(b,h)$ 点.

解 所求弧长为

$$s = \int_0^b \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^b \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b$$

$$= a\operatorname{sh}\frac{b}{a} = \sqrt{\left(a\operatorname{ch}\frac{b}{a}\right)^2 - a^2} = \sqrt{h^2-a^2}.$$

【2434】 $y = \mathrm{e}^x \quad (0 \leqslant x \leqslant x_0)$.

解 所求弧长为 $s = \displaystyle\int_0^{x_0} \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$,

令 $t = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$,

则
$$x = \frac{\ln(t^2-1)}{2},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{t}{t^2-1},$$

所以
$$\int \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$= t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} + C$$

$$= \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1} + C.$$

故
$$s = \left[\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1}\right]\Bigg|_0^{x_0}$$

$$= \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_0}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_0}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_0}}+1}$$

$$- \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

【2435】 $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y \quad (1 \leqslant y \leqslant \mathrm{e})$.

解 所求弧长为

$$s=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\mathrm{d}y=\int_1^e\frac{1+y^2}{2y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln y+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

【2436】 $y=a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant b<a).$

解 所求弧长为

$$s=\int_0^b\sqrt{1+\left(\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$
$$=a\ln\frac{a+b}{a-b}-b.$$

【2437】 $y=\ln\cos x\quad\left(0\leqslant x\leqslant a<\dfrac{\pi}{2}\right).$

解 所求弧长为

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\tan^2x}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right).$$

【2438】 $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$

$(0<b\leqslant y\leqslant a).$

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$,所求弧长为

$$s=\int_b^a\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)}\mathrm{d}y=\int_b^a\frac{a}{y}\mathrm{d}y=a\ln\frac{a}{b}.$$

【2439】 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}\quad\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{3}a\right).$

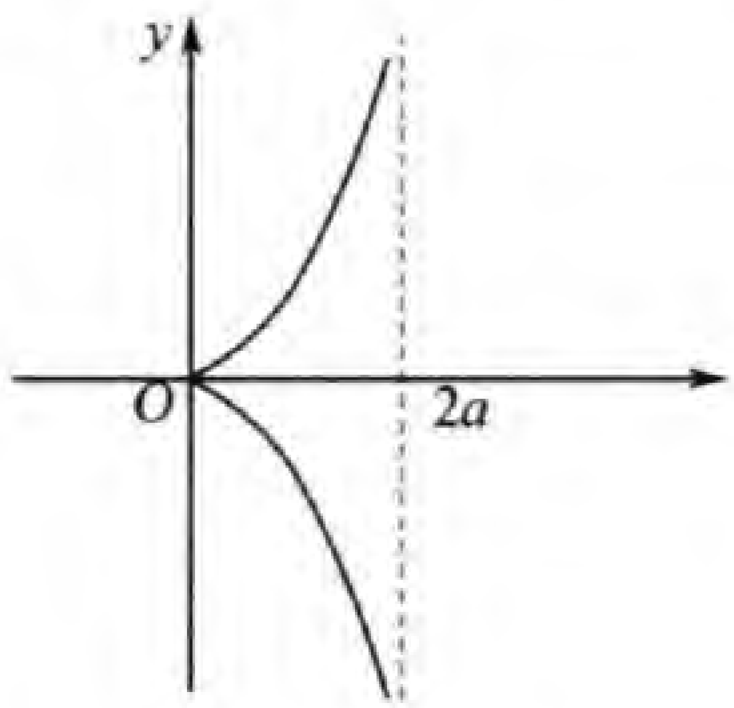
解 如2439题图所示

设 $y=tx$,得

$$x=\frac{2at^2}{1+t^2},y=\frac{2at^3}{1+t^2}$$

当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{3}a$ 时,$0\leqslant t\leqslant\sqrt{5}$(一半弧长)

$$x'_t=\frac{4at}{(t^2+1)^2},y'_t=\frac{2at^4+6at^2}{(t^2+1)^2},$$



2439 题图

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1},$$

所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= 2\int_0^{\sqrt{5}} \frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}\mathrm{d}t \\ &= 32a\int_0^{\arctan\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\sin\varphi \mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi(1+3\sin^2\varphi)} \\ &= \frac{32}{3}\int_1^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2\left(z^2-\frac{4}{3}\right)} \\ &= \frac{32a}{3}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\ln\frac{z-\frac{2}{\sqrt{3}}}{z+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right\}\Bigg|_1^{\frac{2}{3}} \\ &= 4a\ln\left(1+3\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

【2440】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ （星形线）.

解 $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$ $\sqrt{1+y'^2} = \left(\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$,

所求弧长为

$$s = 4\int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = 4a^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a = 6a.$$

【2441】 $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$， $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$， $c^2=a^2-b^2$

(椭圆渐屈线).

解 $\sqrt{x'_t+y'_t}=\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}$

所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{12c^2}{3ab(a^2-b^2)}\{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t\}^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{4c^2(a^3-b^3)}{ab(a^2-b^2)}=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}.\end{aligned}$$

【2442】 $x=\cos^4 t, y=\sin^4 t$.

解 $\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=4a\sin t\cos t\sqrt{\sin^4 t+\cos^4 t}$. 所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a\sin t\cos t\sqrt{\sin^4 t+\cos^4 t}\mathrm{d}t\\&=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)\\&=2a\left[\frac{\sin^2 t-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\sin^2 t\right.\right.\\&\quad\left.\left.-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}(\sin^4 t+\cos^4 t)}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=2a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})\right)=(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2}))a.\end{aligned}$$

【2443】 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$. $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a.\end{aligned}$$

【2444】 当 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$(园的渐伸线)时：

$x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$.

解 所求弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}at\,\mathrm{d}t=2\pi^2a.$$

【2445】 $x=a(\mathrm{sh}t-t),y=a(\mathrm{ch}t-1)\qquad(0\leqslant t\leqslant T).$

解 所求弧长为

$$s=\int_0^T\sqrt{a^2(\mathrm{ch}t-1)^2+a^2\mathrm{sh}^2t}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}a\int_0^T\sqrt{\mathrm{ch}^2t-\mathrm{ch}t}\mathrm{d}t$$

令 $u=\mathrm{ch}t$，则

$$t=\ln(u+\sqrt{u^2-1}),\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}},$$

$$s=\sqrt{2}a\int_1^{\mathrm{ch}T}\sqrt{\frac{u}{u+1}}\mathrm{d}u.$$

再令 $u=\tan^2z$，

则有 $$s=2\sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{\mathrm{ch}T}}\frac{\sin^2z}{\cos^3z}\mathrm{d}z$$

$$=2\sqrt{2}a\left[\frac{\sin z}{2\cos^2z}-\frac{1}{2}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{\mathrm{ch}T}}$$

$$=\sqrt{2}a(\sqrt{\mathrm{ch}T}\cdot\sqrt{1+\mathrm{ch}T}-\sqrt{2})$$

$$-\sqrt{2}a[\ln(\sqrt{\mathrm{ch}T}+\sqrt{1+\mathrm{ch}T})-\ln(1+\sqrt{2})].$$

【2445.1】 $x=\mathrm{ch}^3t,y=\mathrm{sh}^3t\quad(0\leqslant t\leqslant T).$

解 所求弧长为

$$s=\int_0^T\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T3\mathrm{ch}t\mathrm{sh}t\sqrt{\mathrm{ch}^2t+\mathrm{sh}^2t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^T\sqrt{2\mathrm{ch}^2t-1}\mathrm{d}(2\mathrm{ch}^2t-1)$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}(2\mathrm{ch}^2t-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{2}[(\mathrm{ch}^2 T + \mathrm{sh}^2 T)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

【2446】 当 $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ 时，$r = a\varphi$（阿基米德螺线）.

解 所求弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= a\left\{\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1} + \frac{1}{2}\ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\right\}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})\right].$$

【2447】 当 $0 < r < a$ 时，$r = a\mathrm{e}^{m\varphi}$ $(m > 0)$.

解 因为 $0 < r < a$，所以 $-\infty < \varphi < 0$，所求弧长为

$$s = \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2\mathrm{e}^{2m\varphi} + a^2m^2\mathrm{e}^{2m\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= a\sqrt{m^2+1}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{m\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a\sqrt{m^2+1}}{m}\mathrm{e}^{m\varphi}\Bigg|_{-\infty}^0 = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{m}.$$

【2448】 $r = a(1+\cos\varphi)$.

解 所求弧长为

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 8a.$$

【2449】 $r = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$ $\left(|\varphi| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 所求弧长为

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + r'^2_{\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^4}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi = \frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^3\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec\frac{\varphi}{2}\left(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= p\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} + 2p\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\,\mathrm{d}\left(\sec\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2p\left\{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}+\frac{\sec\frac{\varphi}{2}}{2}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{2}\ln\left(\sec\frac{\varphi}{2}+\tan\frac{\varphi}{2}\right)\right\}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= p\{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\}.$$

【2450】 $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2+r'^2} = \sqrt{\left(a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2+\left(a\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)^2}$

$$= a\sin^2\frac{\varphi}{3}\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi),$$

所求弧长为

$$s = \int_0^{3\pi} a\sin^2\frac{\varphi}{3}\mathrm{d}\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

【2451】 $r = a\,\mathrm{th}\frac{\varphi}{2}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

解 $r'_\varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}$

$$\sqrt{r^2+r'^2} = \frac{a}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{4\mathrm{sh}^2\frac{\varphi}{2}\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}+1}$$

$$= \frac{a}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\mathrm{sh}^2\varphi+1}$$

$$= \frac{a\mathrm{ch}\varphi}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}} = a\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right),$$

所求弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} a\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= a\left(\varphi - \mathrm{th}\,\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = a(2\pi - \mathrm{th}\pi).$$

【2452】 $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad (1 \leqslant r \leqslant 3)$.

解 $r^2 - 2r\varphi + 1 = 0$,两边对 φ 求导,得

$$2rr' - 2\varphi r' - 2r = 0,$$

即 $$r' = \frac{r}{r - \varphi},$$从而

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{r\varphi}{r - \varphi} = \frac{r^3 + r}{r^2 - 1},$$

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\mathrm{d}r,$$

所求弧长为

$$s = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{r^3 + r}{r^2 - 1}\cdot\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3\left(r + \frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r = 2 + \frac{1}{2}\ln 3.$$

【2452.1】 $\varphi = \sqrt{r} \quad (0 \leqslant r \leqslant \sqrt{5})$.

解 $r = \varphi^2, r' = 2\varphi, \sqrt{r^2 + r'^2} = \varphi\sqrt{\varphi^2 + 4}$.

当 $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{5}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \sqrt[4]{5}$ 时所求弧长为

$$s = \int_0^{\sqrt[4]{5}} \varphi\sqrt{\varphi^2 + 4}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{5}} \sqrt{\varphi^2 + 4}\,\mathrm{d}(\varphi^2 + 4)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(\varphi^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt[4]{5}} = \frac{1}{3}\left[(\sqrt{5} + 4)^{\frac{3}{2}} - 8\right].$$

【2452.2】 $\varphi = \int_0^r \frac{\mathrm{sh}\rho}{\rho}\mathrm{d}\rho \quad (0 \leqslant r \leqslant R)$.

解 $\varphi'_r = \frac{\operatorname{sh}r}{r}$,从而

$$r'_\varphi = \frac{1}{\varphi'_r} = \frac{r}{\operatorname{sh}r},$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2_\varphi} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{\operatorname{sh}^2 r}} = \frac{r\sqrt{\operatorname{sh}^2 r + 1}}{\operatorname{sh}r} = \frac{r\operatorname{ch}r}{\operatorname{sh}r},$$

$$d\varphi = \frac{\operatorname{sh}r}{r}dr,$$

因此,所求弧长为

$$s = \int_0^R \frac{r\operatorname{ch}r}{\operatorname{sh}r} \cdot \frac{\operatorname{sh}r}{r}dr = \int_0^R \operatorname{ch}r dr = \operatorname{sh}r\Big|_0^R = \operatorname{sh}R.$$

【2452.3】 $r = 1 + \cos t, \varphi = t - \tan\frac{t}{2}$ $(0 \leqslant t \leqslant T < \pi)$.

解 $r'_\varphi = \dfrac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \dfrac{-\sin t}{1 - \frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}}$

$$= -2\frac{\sin t\cos^2\frac{t}{2}}{\cos t} = -\frac{\sin t(1+\cos t)}{\cos t},$$

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}d\varphi$$

$$= \sqrt{(1+\cos t)^2 + \frac{\sin^2 t(1+\cos t)^2}{\cos^2 t}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1+\cos t}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{1+\cos t}dt = dt,$$

故 $$s = \int_0^T dt = T.$$

【2453】 证明椭圆

$$x = a\cos t, y = b\sin t$$

的弧长等于一个正弦曲线波 $y = c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长,其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

解 对于椭圆,其全长为

$$S_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

对正弦曲线，其一波的长度为

$$s_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+c^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

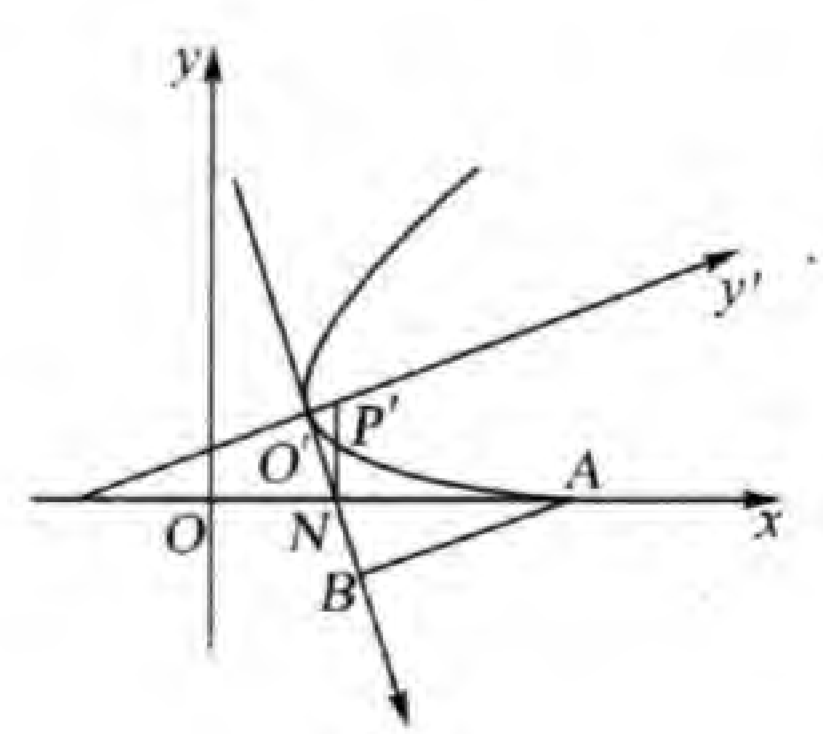
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$，

所以 $s_1=s_2$.

【2454】 抛物线 $4ay=x^2$ 沿轴线 Ox 滚动. 证明抛物线焦点的轨迹为悬链线.

解 如 2454 题图所示，设抛物线切 Ox 轴于点 $A(S,0)O'$ 为抛物线的顶点，P' 为焦点。$O'Y'$ 为抛物线的对称轴，$OX'\perp OY'$，过 A 点作 AB 垂直于 $O'X'$，垂足为 B，引入参数 $O'N=t$，则由抛物线的性质有



2454 题图

$$P'N\perp Ox, O'B=2O'N=2t,$$

从而 $AB=\dfrac{(2t)^2}{4a}=\dfrac{t^2}{a}$，

$$AN=\sqrt{AB^2+BN^2}=\sqrt{\frac{t^4}{a^4}+t^2}=t\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}},$$

$$S=\int_0^{2t}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=t\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}}+a\ln\left(\frac{t}{a}+\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}}\right)$$

$$P'N=\sqrt{O'P'^2+O'N^2}=\sqrt{a^2+t^2}=a\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}},$$

设点 P' 的坐标为 x,y,则

$$x=S-AN=a\ln\left(\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right),\qquad ①$$

$$y=P'N=a\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2},\qquad ②$$

由 ① 式得

$$e^{\frac{x}{a}}=\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2},$$

$$e^{-\frac{x}{a}}=-\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2},$$

上面两式相加,得

$$e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}=2\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=\frac{2}{a}y,$$

即 $$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})=a\operatorname{ch}\frac{x}{a},$$

这是悬链线方程.

【2455】 求出受曲线弯曲处限制的面积

$$y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$$

与圆周长等于这条曲线周长的圆面积的比值.

解 当 $x=0$ 及 $x=\frac{1}{3}$ 时,$y=0$.

由对称性知此环线所围之面为

$$S_1=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{135\sqrt{3}},$$

此环的长为

$$s_1 = 2\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{6\sqrt{x}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

所求圆的半径为R,则按题设有$2\pi R=\frac{4}{3\sqrt{3}}$,所以$R=\frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$. 故圆的面积为

$$S_2 = \pi R^2 = \frac{4}{27\pi},$$

所以 $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}}.$$

§7. 体积的计算方法

1. **已知横断面的物体体积**　若物体体积存在,且$S=S(x)(a\leqslant x\leqslant b)$是用在$x$点上垂直于$Ox$轴线的平面切下的物体断面面积,则

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

2. **旋转体的体积**　曲边梯形$a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant y(x)$(式中$y(x)$为单值连续函数)围绕$Ox$轴旋转而形成的物体体积等于:

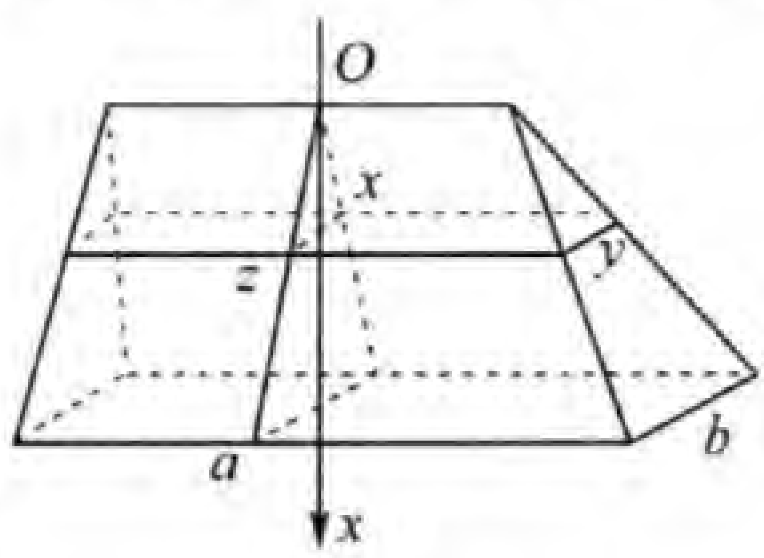
$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)\mathrm{d}x.$$

在更普遍的情况下,图形为$a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$,(式中$y_1(x)$和$y_2(x)$都为非负数的连续函数)围绕$Ox$轴旋转而形成的环形体体积等于:

$$V=\pi\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\mathrm{d}x.$$

【2456】　求小阁楼的体积,阁楼的底是边长等于a和b的矩形,上棱边等于c,而高等于h.

解 如 2456 题图所示取 x 轴向下，则有



2456 题图

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{h},$$

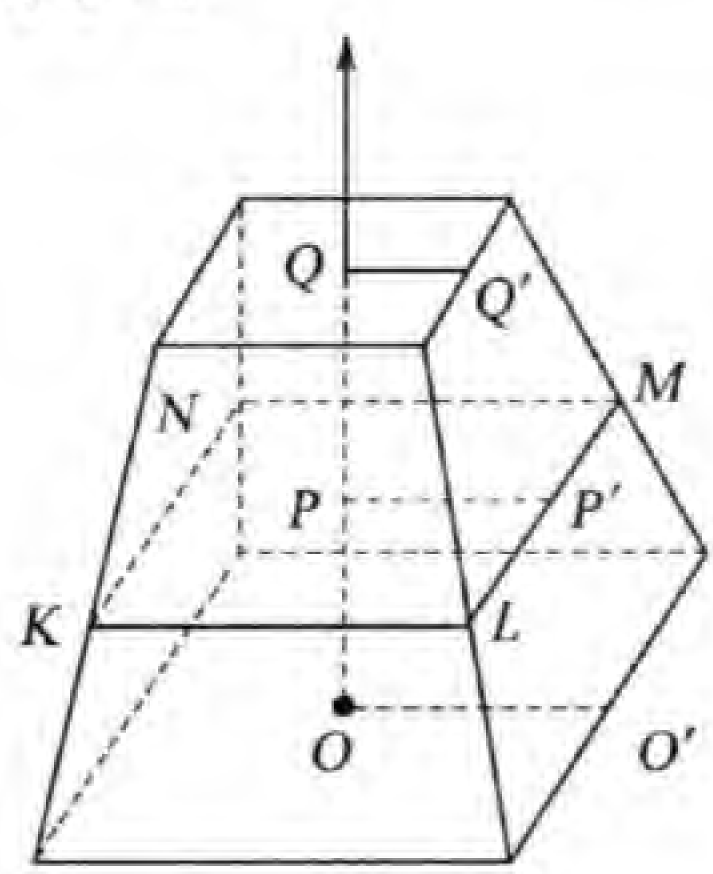
即
$$y=\frac{b}{h}x,\frac{\frac{z-c}{2}}{\frac{a-c}{2}}=\frac{x}{h},\text{即}$$

$$z=\frac{a-c}{h}x+c.$$ 于是，所求阁楼的体积为

$$V=\int_0^a yz\,\mathrm{d}z=\int_0^h\frac{b}{h}x\cdot\left(\frac{a-c}{h}x+c\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b}{h}\cdot\frac{a-c}{h}\cdot\frac{1}{3}h^3+\frac{bc}{h}\cdot\frac{1}{2}h^2=\frac{bh}{6}(2a+c).$$

【2457】 求截楔形的体积，其平行的底为边长分别等于 A、B 和 a、b 的矩形，而高等于 h.

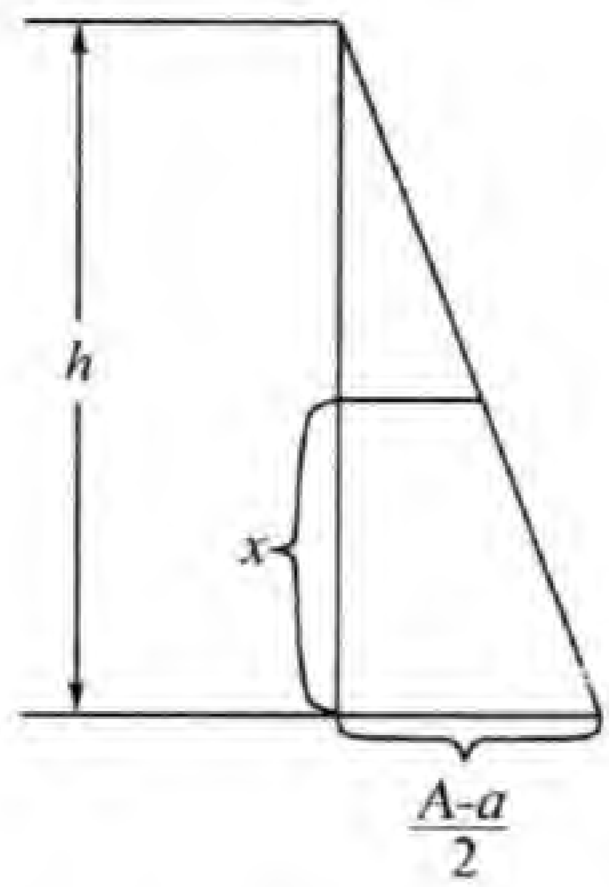


2457 题图

解 $OO'=\dfrac{A}{2}, QQ'=\dfrac{a}{2}, OQ=h.$

设 $OP=x$,则

$$PP'=\frac{a}{2}+\frac{h-x}{h}\cdot\frac{A-a}{2}.$$



2457 题图

所以 $$KL=a+(A-a)\cdot\frac{h-x}{h}.$$

同样 $$LM=b+(B-b)\cdot\frac{h-x}{h}.$$

从而四边形 $KLMN$ 的面积

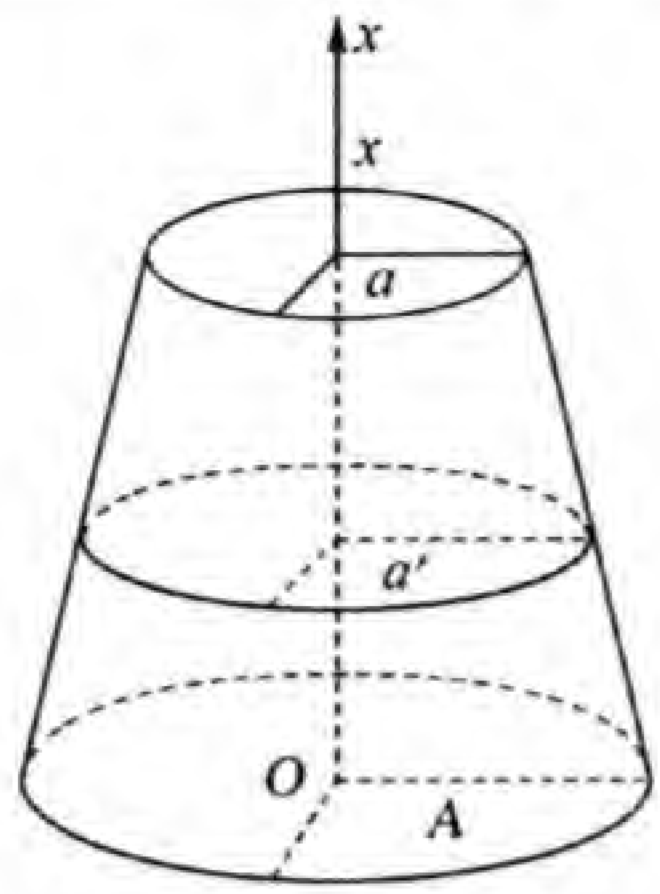
$$\begin{aligned}S(x)&=\left[a+(A-a)\frac{h-x}{h}\right]\left[b+(B-b)\frac{h-x}{h}\right]\\&=ab+[a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)\\&\quad+(A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2.\end{aligned}$$

因此,所求体积为

$$V=\int_0^h S(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{6}[(2A+a)B+(2a+A)b].$$

【2458】 求圆台的体积,其上、下底是半轴长分别等于 A、B 和 a、b 的椭圆,高等于 h.

解 如 2458 题图所示



2458 题图

$$a' = a + \frac{h-x}{h}(A-a), b' = b + \frac{h-x}{h}(B-b),$$

所以此截面的面积为

$$S(x) = \pi a'b'$$
$$= \pi\left\{ab + (A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 + [a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)\right\}.$$

所求体积为

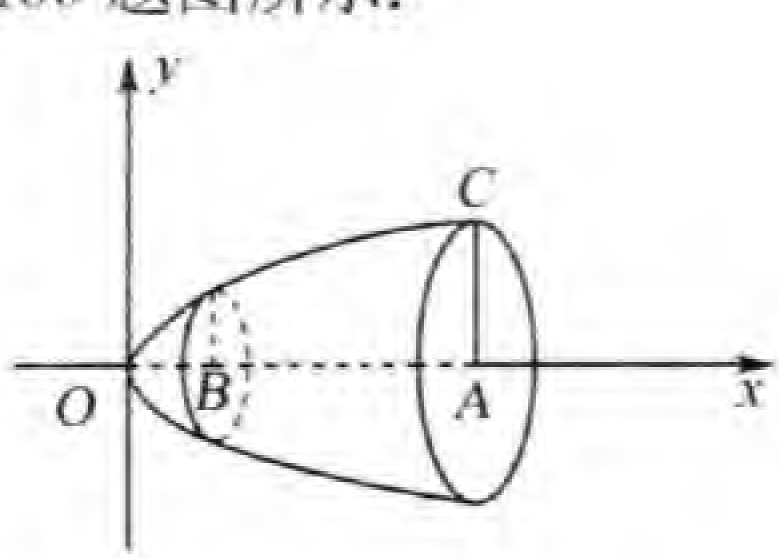
$$V = \int_0^h S(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b].$$

【2459】 求旋转抛物体的体积，其底为 S，而高等于 H.

解 设抛物线的方程为

$$y^2 = 2px,$$

绕 Ox 轴旋转，如 2459 题图所示.



2459 题图

则 $\qquad OA = H.$

记 $\qquad OB = x,$

由假设 $S = \pi |AC|^2 = \pi(2pH) = 2\pi Hp,$

即 $p = \dfrac{S}{2\pi H}.$

距原点为 x 的截面面积为

$$S(x) = \pi y^2 = 2\pi px.$$

于是,所求体积为

$$V = \int_0^H S(x)\mathrm{d}x = \pi pH^2 = \pi \cdot \frac{S}{2\pi H} \cdot H^2 = \frac{SH}{2}.$$

【2460】 设立体的垂直于 Ox 轴的横断面面积 $S = S(x)$ 按照二次式规律变化:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中 A、B 与 C 都是常数.

证明:这个物体的体积等于:

$$V = \frac{H}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right],$$

其中 $H = b-a$(辛普森公式).

证 $\quad V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\mathrm{d}x$

$$= \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b-a)$$

$$= \frac{b-a}{6}[2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(a+b) + 6C]$$

$$= \frac{H}{6}[(Aa^2 + Ba + C) + (Ab^2 + Bb + C)$$

$$+ A(a^2 + 2ab + b^2) + 2B(a+b) + 4C]$$

$$= \frac{H}{6}\left[S(a) + S(b) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

【2461】 物体是点 $M(x,u,z)$ 的集合. 这里 $0 \leqslant z \leqslant 1$,而且若 z 为有理数时,$0 \leqslant x \leqslant 1$,$0 \leqslant y \leqslant 1$;若 z 为无理数时,$-1 \leqslant x \leqslant 0$,$-1 \leqslant y \leqslant 0$.

证明:虽然相应的积分为

$$\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z = 1,$$

但这个物体的体积不存在.

证　显然,对于任何 $0 \leqslant z \leqslant 1$,$(x,y)$ 都在一边长为 1 的正方形中变化,所以 $S(z)=1$. 从而

$$\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z = 1,$$

而此物体(V) 的体积不存在. 事实上,无完全含于(V) 内的多面体(X) 存在,从而这种(X) 的体积的上确界为 0,即(V) 的内体积$V_* = \sup\{x\} = 0$. 另一方面,(V) 的外体积 $V^* = \inf\{Y\}$,其中的下确界是对所有完全包含着(V) 的多面体(Y) 的体积 Y 来取的. 由于 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 中的有理数和无理数都在$[0,1]$ 中稠密. 故上述多面体(Y) 必完全包含点集

$(Y_0) = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$,

而 $Y_0 \supset (V)$. 且(Y_0) 的体积 $Y_0 = 4$. 因此

$$V^* = \inf\{Y\} = 4,$$

故 $V^* \neq V_*$,故(V) 的体积不存在.

求下列曲面所围成的体积(2462 ~ 2471).

【2462】　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, z=\dfrac{c}{a}x, z=0.$

解　如 2462 题图所示用垂直于 Oy 轴的平面截割立体得直角三角形 PQR.

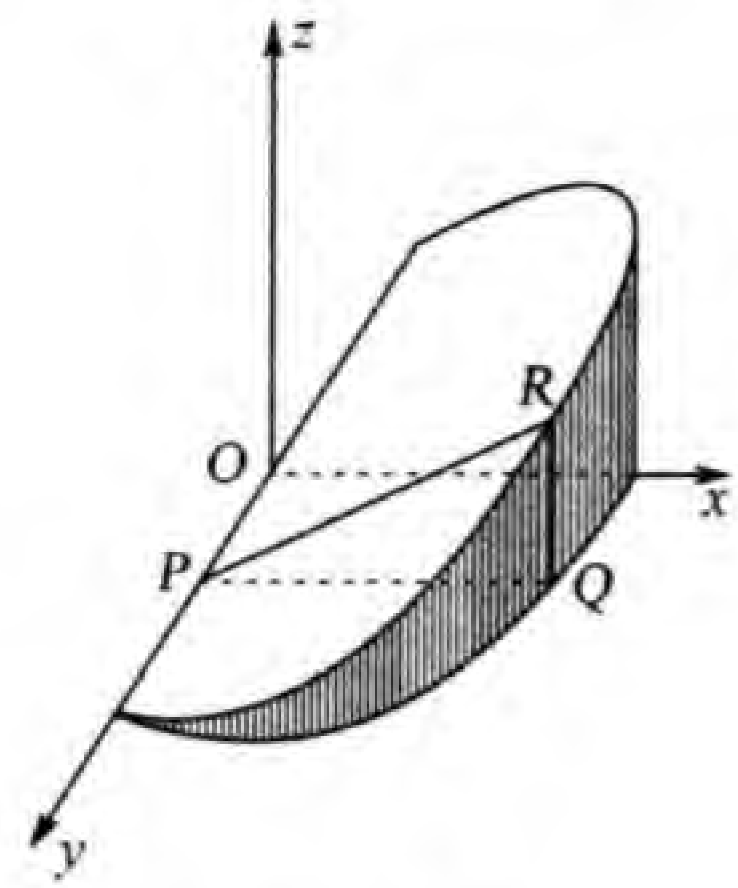
设 $OP = y$,则 $PQ = x$,高 $QR = \dfrac{c}{a}x$,从而三角形 PQR 的面积为 $S(x) = \dfrac{1}{2}x \cdot \dfrac{c}{a}x = \dfrac{ac}{2}\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$,

于是,所求体积为 $V = 2\displaystyle\int_0^b \frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{3}abc$.

【2463】　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　(椭面).

解　用垂直于 Ox 轴的平面截椭球得截痕为一椭圆,其长,短半轴分别为

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ 及 } c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$



2462 题图

从而此椭圆的面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

因此所求椭球的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\pi bc\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi abc.$$

【2464】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, z=\pm c.$

解 图形为单叶双曲面，用垂直于 z 轴的平面截立体得截痕为一椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{z^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{z^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=z,\end{cases}$$

其面积为 $S(z)=\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$.

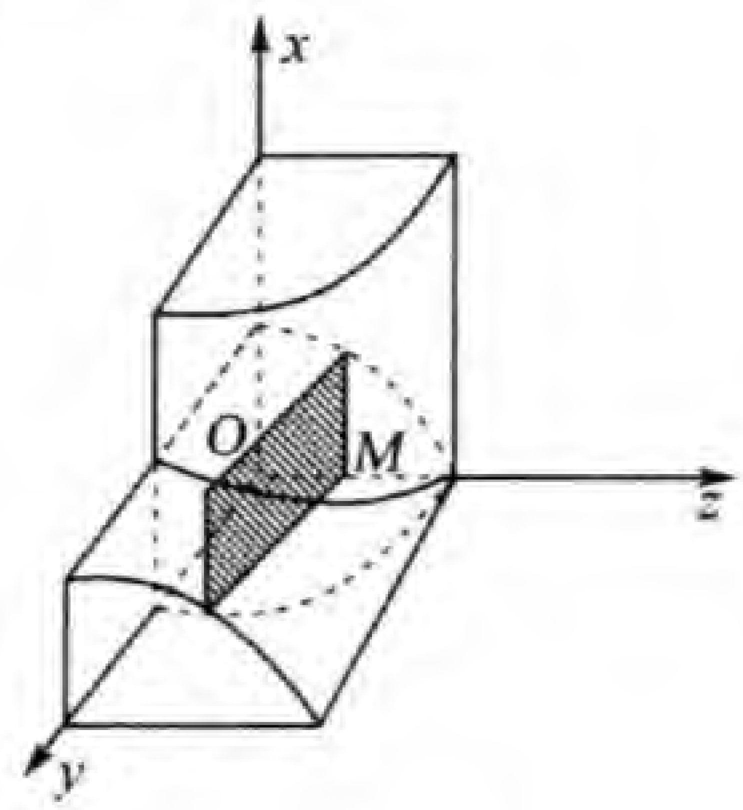
因此，所求体积为

$$V=\int_{-c}^{c}S(z)\mathrm{d}z=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{8}{3}\pi abc.$$

【2465】 $x^2+z^2=a^2, y^2+z^2=a^2.$

解 如 2465 题图所示考虑第一卦限内的部分，过点 $(0,0,z)$ 作垂直于 Oz 轴的平面截立体，得截痕为一正方形，其边长为

$\sqrt{a^2 - z^2}$,所以截痕的面积为



2465 题图

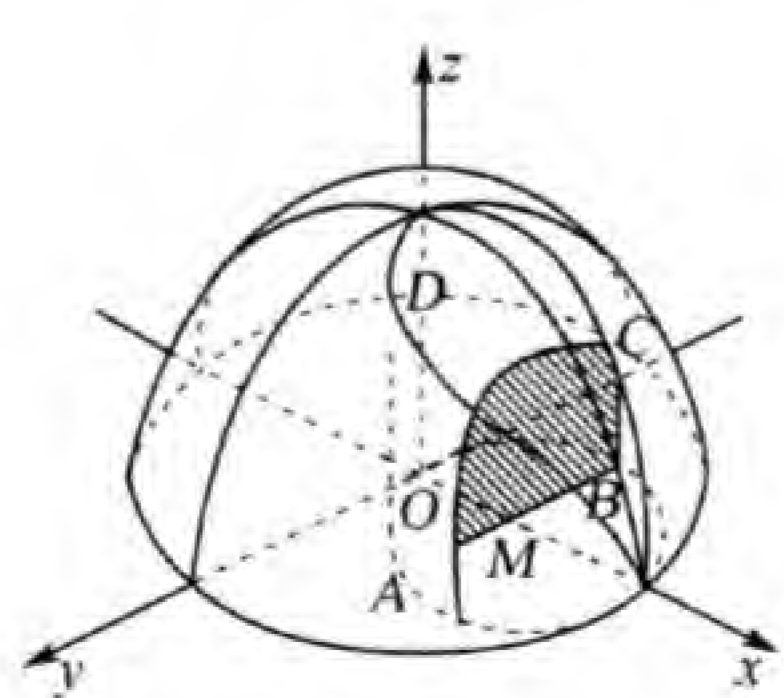
$$S(z) = a^2 - z^2,$$

所以,所求体积为

$$V = 8\int_0^a (a^2 - z^2)\mathrm{d}z = \frac{16}{3}a^3.$$

【2466】 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$

解 如 2466 题图所示,考虑在 xOy 平面上方的立体过点 $M(x,0,0)$ 作垂直于 Ox 轴的平面截立体得截痕为一曲边梯形,其曲边方程为



2466 题图

$$z = \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2} \qquad (x\text{ 固定}),$$

$$-\sqrt{ax - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{ax - x^2},$$

从而截面面积为

$$S(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

因此所求体积为

$$V=2\int_0^a S(x)\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^a\left[a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

【2467】 $z^2=b(a-x),x^2+y^2=ax.$

解 和前题一样,先考虑xOy平面上方的部分,用垂直于Ox轴的平面截立体得截痕为一曲边梯形,其面积为

$$S(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{b(a-x)}\,\mathrm{d}y$$
$$=2\sqrt{ax-x^2}\sqrt{b(a-x)},$$

从而所求体积为

$$V=2\int_0^a S(x)\mathrm{d}x$$
$$=4\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\sqrt{b(a-x)}\,\mathrm{d}x$$
$$=4\sqrt{b}\int_0^a\sqrt{x}(a-x)\mathrm{d}x=\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

【2468】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{z^2}=1\quad(0<z<a).$

解 对于固定的z,用垂直于Oz轴的平面截立体,得截痕为椭圆,其面积为

$$S(z)=\pi az,$$

于是所求体积为

$$V=\int_0^a S(z)\mathrm{d}z=\int_0^a\pi az\,\mathrm{d}z=\frac{\pi a^3}{2}.$$

【2469】 $x+y+z^2=1,x=0,y=0,z=0.$

解　对于固定的 z，垂直于 OZ 轴的平面截立体，其截痕为一直角三角形，其面积为

$$S(z)=\frac{1}{2}(1-z^2)^2,$$

故所求体积为

$$V=\int_0^1\frac{1}{2}(1-z^2)^2\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-2z^2+z^4)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}.$$

【2470】　$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2$.

解　不妨设 $a>0$，此曲面为一椭球面. 固定 z 得截痕为椭圆

$$x^2+xy+y^2+zx+2y+(z^2-a^2)=0,$$

由 P. M 菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》第二卷第一分册第 330 目中的公式有，此截面的面积为

$$S(z)=-\frac{\pi\Delta}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{8\pi\Delta}{3\sqrt{3}},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{z}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{z}{2}\\\frac{z}{2}&\frac{z}{2}&z^2-a^2\end{vmatrix}=\frac{2z^3-3a^2}{4},$$

所以　$$S(z)=\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}.$$

z 的变化范围为 $2z^2-3a^2\leqslant 0$，即

$$|z|\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

因此所求体积为

$$V=\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}a}^{\sqrt{\frac{3}{2}}a}\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}\mathrm{d}z=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3.$$

【2471】　证明：平面图形 $a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant y(x)$，(其中 $y(x)$— 为单值连续函数) 围绕 Oy 轴旋转形成的物体体积：

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)\mathrm{d}x.$$

证 $\Delta V_y = \pi[(x+\Delta x)^2 - x^2]y(x)$
$= 2\pi xy\Delta x + O((\Delta x)^2)$,

于是,所求的体积为

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)\mathrm{d}x.$$

求出由下列线段旋转时所得到的曲面所围成的体积(2472 ~ 2481).

【2472】 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ 绕 Ox 轴(半三次抛物线).

解 所求体积为

$$V_x = \pi\int_0^a b^2\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{7}\pi ab^2.$$

【2473】 $y = 2x - x^2$, $y = 0$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

解 令 $y = 0$ 得 $x = 0$ 及 $x = 2$,即 $0 \leqslant x \leqslant 2$. 因此所求面积为

(1) $V_x = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15}$;

(2) $V_y = 2\pi\int_0^2 (2x - x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{8\pi}{3}$.

【2474】 $y = \sin x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

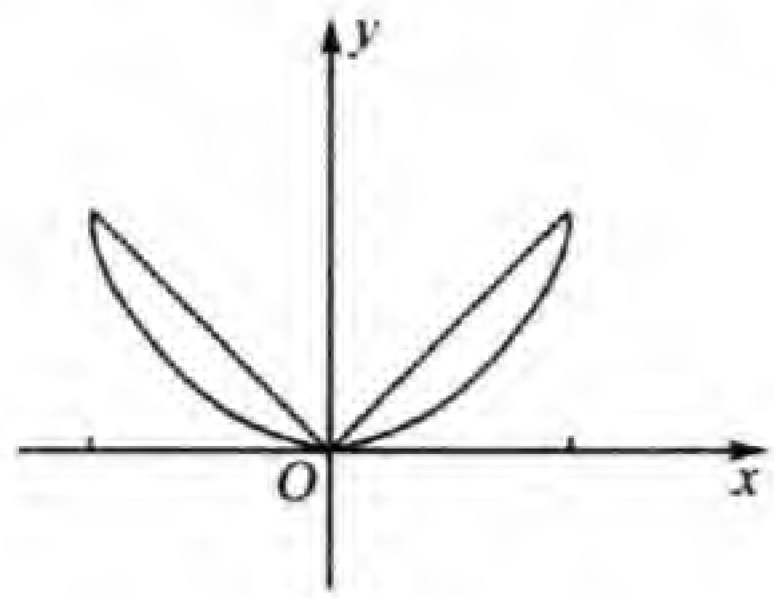
解 所求体积为

(1) $V_x = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$;

(2) $V_y = 2\pi\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x = 2\pi^2$.

【2475】 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

解 两曲线 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$ 的交点为 (a,b) 及 $(-a, b)$ 如 2475 题图所示,由对称性知所求体积为



2475 题图

(1) $V_x = 2\cdot\pi\int_0^a\left(b^2\dfrac{x^2}{a^2}-b^2\dfrac{x^4}{a^4}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4\pi}{15}ab^2$;

(2) $V_y = \pi\int_0^b\left(\dfrac{a^2y}{b}-\dfrac{a^2y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=\dfrac{\pi a^2b}{6}$.

【2476】 $y=\mathrm{e}^{-x},y=0\quad(0\leqslant x<+\infty)$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

解 所求体积为

(1) $V_x=\pi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $V_y=2\pi\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}=2\pi$.

【2477】 $x^2+(y-b)^2=a^2(0<a\leqslant b)$;绕 Ox 轴.

解 $y_1=b+\sqrt{a^2-x^2}$,

$y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}\qquad(-a\leqslant x\leqslant a)$,

所求体积为

$$\begin{aligned}V_x&=\pi\int_{-a}^a(y_1^2-y_2^2)\mathrm{d}x=8b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=2\pi^2a^2b.\end{aligned}$$

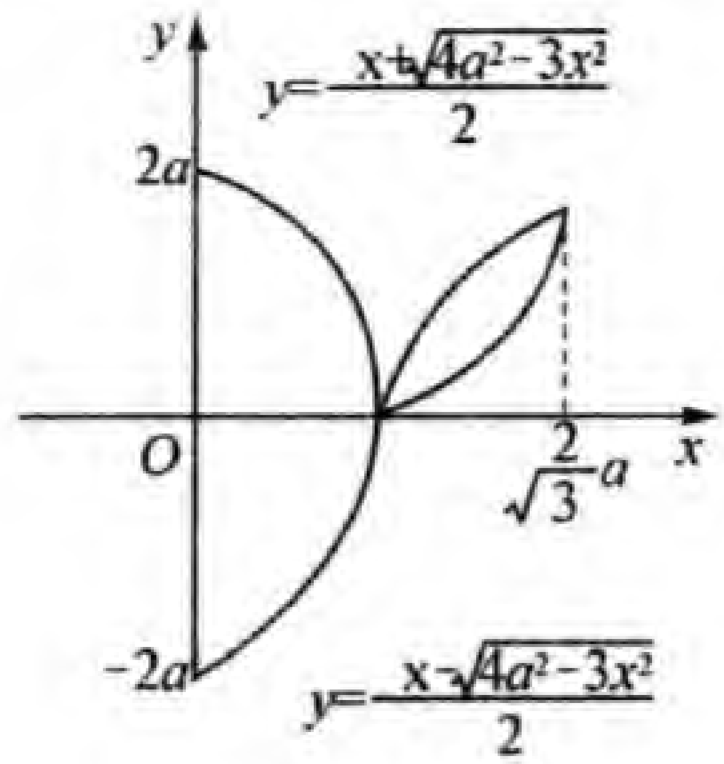
【2478】 $x^2-xy+y^2=a^2$;绕 Ox 轴.

解 原方程变为

$$y^2-xy+x^2-a^2=0,$$

从而 $$y=\frac{x\pm\sqrt{4a^2-3x^2}}{2},$$

函数的定义域为$\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}a,\dfrac{2}{\sqrt{3}}a\right]$. 与 Ox 轴的交点分别为 $x=-a$ 及



2476 题图

$x=a$. 由对称性可知所求体积

$$V_x=2\left\{\pi\int_0^a\frac{1}{4}(x+\sqrt{4a^2-3x^2})^2\mathrm{d}x\right.$$

$$+\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\left[\frac{1}{4}(x+\sqrt{4a^2-3x^2})^2\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}(x-\sqrt{4a^2-3x^2})^2\right]\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^a(4a^2-2x^2+2x\sqrt{4a^2-3x^2})\mathrm{d}x$$

$$+2\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}x\sqrt{4a^2-3x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[2a^2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}(4a^2-3x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^a$$

$$-\frac{2}{9}(4a^2-3x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

【2479】 $y=\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}(0\leqslant x<+\infty)$ 绕 Ox 轴.

解 函数的定义域为

$$[2n\pi,(2n+1)\pi]\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

故所求体积为

$$V_x=\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi}{5}\mathrm{e}^{-2x}(-2\sin x-\cos x)\Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$= \frac{\pi}{5}(e^{-2\pi}+1)\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-4n\pi}$$

$$= \frac{\pi}{5}\frac{e^{-2\pi}+1}{1-e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}.$$

【2480】 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi), y = 0$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴;(3) 绕直线 $y = 2a$.

解　所求体积为

(1) $V_x = \pi\int_0^{2\pi a} y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 \mathrm{d}t$

$= 5\pi^2 a^3$;

(2) $V_y = 2\pi\int_0^{2\pi a} xy\mathrm{d}x$

$= 2\pi\int_0^{2\pi} a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t = 6\pi^3 a^3$;

(3) 作平移:$y = \bar{y}+2a, x = \bar{x}$ 则曲线方程为

$\bar{x} = a(t-\sin t), \bar{y} = -a(1+\cos t)$ 及 $\bar{y} = -2a$.

于是所求体积为

$$V_{\bar{x}} = \pi\int_0^{2\pi}[4a^2 - a^2(1+\cos t)^2]a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= 7\pi^2 a^3.$$

【2481】 $x = a\sin^3 t, y = b\cos^3 t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

解　这是一个封闭的曲线. 由对称性知,所求体积为

(1) $V_x = 2\cdot\pi\int_0^{\frac{2}{\pi}}(b\cos^3 t)^2(3a\sin^2 t\cos t)\mathrm{d}t$

$$= 6\pi ab^2\left[\int_0^{\frac{2}{\pi}}\cos^7 t\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 t\,\mathrm{d}t\right]$$

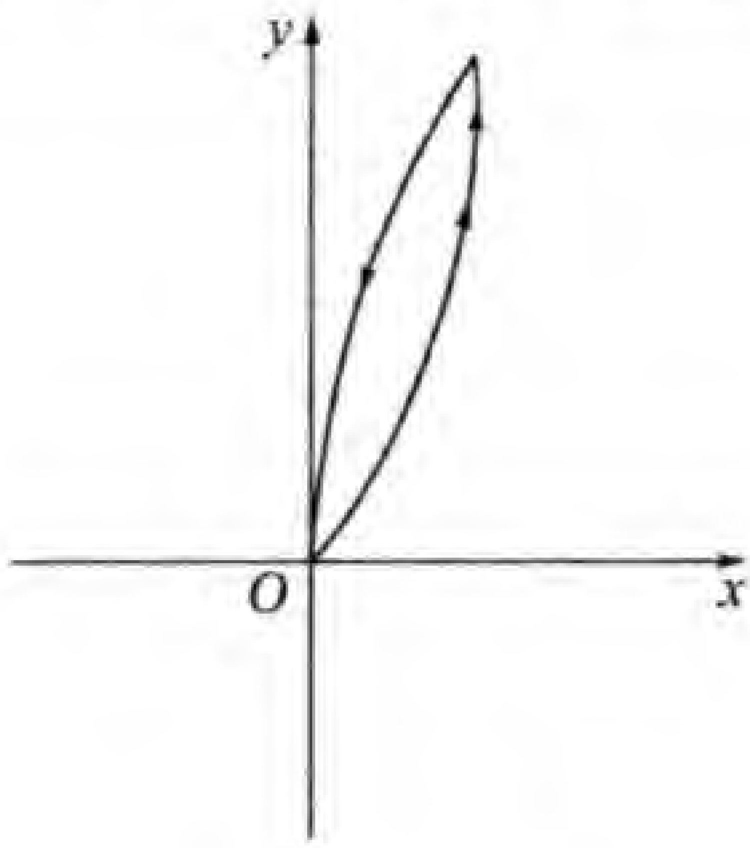
$$= 6\pi ab^2\left(\frac{6!!}{7!!}-\frac{8!!}{9!!}\right) = \frac{32}{105}\pi ab^2;$$

(2) 由对称性知,只须上述答案中的 a、b 对调即得

$$V_y = \frac{32}{105}\pi a^2 b.$$

【2481.1】 求出曲线环 $x = 2t-t^2, y = 4t-t^3$ 旋转围成的体积;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

解　当 $t=0$、2 时，$x=0,y=0$. 曲线如 2481.1 题图所示.



2481.1 题图

$$0\leqslant t\leqslant 2, t=1\pm\sqrt{1-x}.$$

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$t=1-\sqrt{1-x}$；

当 $1\leqslant t\leqslant 2$ 时，$t=1+\sqrt{1-x}$.

即
$$y_1=4(1-\sqrt{1-x})-(1-\sqrt{1-x})^3,$$
$$y_2=4(1+\sqrt{1-x})-(1+\sqrt{1-x})^3,$$

所求体积

$$\begin{aligned}V_x&=\pi\left(\int_0^1 y_2^2\,dx-\int_0^1 y_1^2\,dx\right)\\&=\pi\left[\int_1^2(4t-t^3)^2 2(1-t)dt-\int_0^1(4t-t^3)^2 2(1-t)dt\right]\\&=2\pi\left[\left(\frac{16}{3}t^3-4t^4-\frac{8}{5}t^5+\frac{4}{3}t^6+\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{8}t^8\right)\Big|_1^2\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{16}{3}t^3-4t^4-\frac{8}{5}t^5+\frac{4}{3}t^6+\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{8}t^8\right)\Big|_0^1\right]\\&=\frac{37\pi}{6},\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}V_y&=\pi\int_0^3[x_2^2(y)-x_1^2(y)]dy\\&=\pi\left[\int_0^1(2t-t^2)^2(4-3t^2)dt-\int_1^2(2t-t^2)^2(4-3t^2)\right]dt\end{aligned}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{16}{3}t^3 - 4t^4 - \frac{8}{5}t^5 + 2t^6 - \frac{3}{7}t^7\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{16}{3}t^3 - 4t^4 - \frac{8}{5}t^5 + 2t^6 - \frac{3}{7}t^7\right)\Big|_1^2\right]$$

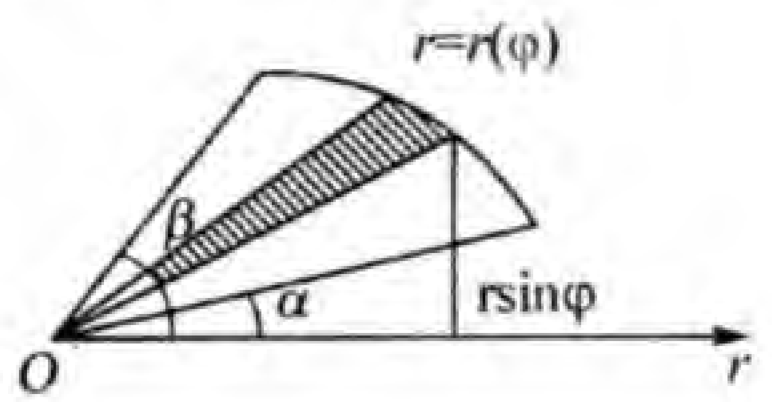
$$= 2\pi.$$

【2482】 证明：平面图形 $0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)$（其中 φ 和 r 为极坐标）围绕极轴旋转形成的物体体积：

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

证 面积微元为

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r,$$



2482 题图

它绕极轴旋转所得微环形体积

$$\mathrm{d}v = 2\pi r\sin\varphi\mathrm{d}S = 2\pi r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r,$$

于是所求体积为

$$V = 2\pi\int_\alpha^\beta\left(\sin\varphi\int_0^{r(\varphi)} r^2\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

求由极坐标给定的平面图形旋转形成的体积(2484 ~ 2485).

【2483】 $r = a(1+\cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$：(1) 围绕极轴；(2) 围绕直线 $r\cos\varphi = -\dfrac{a}{4}$.

解 (1) $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{3}a^3(1+\cos\varphi)^4\Big|_0^\pi = \frac{8\pi a^3}{3};$$

(2) 由 2419 题知心脏线 $r = a(1+\cos\varphi)$ 的面积为$\dfrac{3\pi a^2}{2}$，而其

重心为 $\varphi_0 = 0, r_0 = \frac{5a}{6}$(见 2512 题图).

根据古尔金第二定理(见 2506 题),可求得所求体积为

$$V = 2\pi\left(\frac{5a}{6} + \frac{a}{4}\right)\frac{3\pi a^2}{2} = \frac{13}{4}\pi a^2.$$

【2484】 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$:(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴;(3) 绕直线 $y = x$.

提示:转换到极坐标.

解 (1) 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2(2\cos^2\varphi - 1),$$

$$V_x = 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^2(2\cos^2\varphi - 1)]^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi,$$

由于 $$\int (2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int [(\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - 1]^{\frac{3}{2}} d(\sqrt{2}\cos\varphi)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi - 5)\sqrt{2\cos^2\varphi - 1} + \frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2\cos^2\varphi - 1})\right] + C,$$

所以 $$V_x = -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi - 5)\sqrt{2\cos^2\varphi - 1} + \frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2\cos^2\varphi - 1})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^3\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{2}{3}\right];$$

(2) 利用对称性知,所求体积为

$$V_y = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cos\varphi d\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi,$$

令 $$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x,$$

则 $\sqrt{\cos 2\varphi}=\cos x,\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\mathrm{d}x,$

且 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是

$$V_y=\frac{4\pi a^3}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}};$$

(3) 利用对称性知，所求体积为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}r^3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi^2a^3}{4}.$$

【2484.1】 求由阿基米德半螺线 $r=a\varphi(a>0;0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 所围的图形围绕极轴旋转形成的体积.

解 所求体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}r^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3\varphi^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{2\pi}{3}a^3(-\varphi^3\cos\varphi+3\varphi^2\sin\varphi-6\varphi\cos\varphi+6\sin\varphi)\Big|_0^{\pi}$$
$$=\frac{2a^3\pi^2}{3}(\pi^2+6).$$

【2484.2】 求由曲线 $\varphi=\pi r^3,\varphi=\pi$ 所围的图形围绕极轴旋转形成的体积.

解 所求体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}r^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\frac{\varphi}{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{2\pi}{3}(-\varphi\cos\varphi+\sin\varphi)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi}{3}.$$

【2485】 求出图形 $a\leqslant r\leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ 围绕极轴旋转形成的

体积.

解 $r=a$ 与 $r=a\sqrt{2\sin2\varphi}$,在第一象限的相交点为 $\left(a,\frac{\pi}{12}\right)\left(a,\frac{5\pi}{12}\right)$.利用对称性知,所求体积为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\left[(a\sqrt{2\sin2\varphi})^3-a^3\right]\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}(4\sqrt{2}\sqrt{\sin2\varphi}\cdot\sin^2\varphi\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi.$$

为求上述积分,令

$$I_1=\int\sqrt{\sin2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi,$$

$$I_2=\int\sqrt{\sin2\varphi}\cos^2\varphi\cos^{\varphi}d\varphi,$$

$$I_2-I_1=\int(\sin2\varphi)^{\frac{1}{2}}\cos2\varphi\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\cos\varphi(sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}I_1,$$

即 $$I_2-\frac{5}{3}I_1=\frac{1}{3}cos\varphi(\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}+C,$$

$$I_1+I_2=\int\sqrt{\sin2\varphi)}\cos\varphi d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}\sqrt{\cot\varphi d\varphi}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{\sin2\varphi})$$

$$+\frac{1}{4}\left[\ln(\sin\varphi+\cos\varphi+\sqrt{\sin2\varphi})+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)\right].$$

故 $$I_1=\frac{3}{8}\left\{\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{\sin2\varphi})\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\left[\ln(\sin\varphi+\cos\varphi+\sqrt{\sin2\varphi})\right.$$

$$\left.+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)\right]-\frac{1}{3}\cos\varphi(\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}+C.$$

而 $$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\sqrt{\sin2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{8}+\frac{3}{64}\pi,$$

因此 $$V=\frac{4\pi a^3}{3}\left[4\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{3\pi}{64}\right)+\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\right]=\frac{\pi^2a^3}{2\sqrt{2}}.$$

§8. 旋转曲面面积的计算方法

平滑曲线 AB 围绕 Ox 轴旋转形成的曲面面积等于：

$$P=2\pi\int_A^B|y|\,ds$$

其中 ds 为弧的微分.

求出下列曲线旋转形成的曲面面积(2486 ~ 2498).

【2486】 $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}(0\leqslant x\leqslant a)$；围绕 Ox 轴.

解 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}$,

于是所求表面积为

$$\begin{aligned}P_x&=2\pi\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{a}}\cdot\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}dx\\&=\frac{3\pi}{a}\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}dx\\&=\frac{3\pi}{9}\int_0^a\left(x+\frac{2a}{9}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2a}{9}\right)^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}d\left(x+\frac{2a}{9}\right)\\&\quad-\frac{2\pi}{3}\int_0^a\sqrt{\left(x+\frac{2a}{9}\right)^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}d\left(x+\frac{2a}{9}\right)\\&=\frac{3\pi}{a}\cdot\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{4ax}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a-\frac{2\pi}{3}\left\{\frac{x+\frac{2a}{9}}{2}\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\right.\\&\quad\left.-\frac{\frac{4a^2}{81}}{2}\ln\left(x+\frac{2a}{9}-\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\right)\right\}\Big|_0^a\\&=\frac{13\sqrt{13}}{27}\pi a^2-\frac{11\sqrt{13}}{81}\pi a^2+\frac{4\pi a^2}{243}\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}.\end{aligned}$$

【2487】 $y=a\cos\frac{\pi x}{2b}(|x|\leqslant b)$；围绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2+a^2\pi^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}},$$

所以,所求面积为

$$\begin{aligned}P_x&=2\pi\int_{-b}^{b}y\sqrt{1+y'^2}\,dx\\&=2\pi\int_{-b}^{b}a\cos\frac{\pi x}{2b}\cdot\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2+a^2\pi^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\,dx\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi a\cdot\sin\frac{\pi x}{2b}+\sqrt{4b^2+a^2\pi^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right.\\&\quad\left.+\frac{4b^2}{2}\ln\left|\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right|\right]\Bigg|_0^b\\&=2a\sqrt{a^2\pi^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{a^2\pi^2+4b^2}}{2b}.\end{aligned}$$

【2488】 $y=\tan x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$;围绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\sec^4x}=\sqrt{\frac{\cos^4x+1}{\cos^4x}}$,

所求面积为

$$\begin{aligned}P_x&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}\,dx\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^4x+1}\,d\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)\\&=\pi\left[\frac{\sqrt{\cos^4+1}}{\cos^2x}-\ln\left(\cos^2x+\sqrt{\cos^4x+1}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\left(\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]\right).\end{aligned}$$

【2489】 $y^2=2px\quad(0\leqslant x\leqslant x_0)$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $\sqrt{1+y_x'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{p}{y}\right)^2}=\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$,

于是所求面积为

$$P_x = 2\pi\int_0^{x_0} \sqrt{2px}\cdot\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x$$

$$= \pi\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}(p+2x)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{x_0}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2\mathrm{p}x_0+p^2}-p^2\right].$$

(2) $\sqrt{1+x'^2_y} = \dfrac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$,

且由对称性知,所求面积为

$$P_y = 4\pi\int_0^{\sqrt{2\mathrm{p}x_0}} x\sqrt{1+x'^2_y}\mathrm{d}y$$

$$= 4\pi\int_0^{\sqrt{2\mathrm{p}x_0}} \frac{y^2}{2p}\cdot\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2\pi}{p^2}\left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8}\sqrt{p^2+y^2}-\frac{p^4}{8}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right]\Big|_0^{\sqrt{2\mathrm{p}x_0}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\Big[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}$$

$$-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\Big].$$

【2490】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b\leqslant a)$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $y' = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$,所求面积为

$$P_x = 2\pi\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{y^2+\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2+\frac{b^2}{a^2}(\frac{b^2}{a^2}-1)x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\,\frac{b}{a}2x\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right]\Bigg|_0^a$$

$$= 2\pi\cdot\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$$

$$= 2\pi\, b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right),$$

其中 $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆之离心率.

(2) $x\sqrt{1+x'^2_y}=\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2+\dfrac{a^2-b^2}{b^2}y^2}$

$$=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2},$$

所求面积为

$$P_y=2\pi\,\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\frac{a}{b}\left[\frac{x}{2}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}+\frac{b^3}{2c}\ln\left(\frac{c}{b}y+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}\right)\right]\Bigg|_{-b}^{b}$$

$$=2\pi a\left\{\sqrt{b^2+c^2}+\frac{b^2}{2c}\ln\left[\frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c}\right]\right\}$$

$$=2\pi a\left[a+\frac{b^2}{2c}\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)\right].$$

【2491】 $x^2+(y-b)^2=a^2(b\geqslant a)$;绕 Ox 轴.

解 将圆分成两个单值分支

$$y=b+\sqrt{a^2-x^2}\text{ 及 }y=b-\sqrt{a^2-x^2},$$

于是所求表面积为

$$P_x=2\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$+2\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=4\pi ab\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=4\pi^2ab.$$

【2492】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;绕 Ox 轴.

解 $y'_x=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}},\sqrt{1+y'^2}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$,

所求表面积为

$$P_x=2\cdot 2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{12\pi a^{\frac{1}{3}}}{5}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a=\frac{12\pi a^2}{5}.$$

【2493】 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(|x|\leqslant b)$;(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴.

解 (1) 所求表面积为

$$P_x=2\pi\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi a\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\mathrm{d}x=2\pi a\int_0^b\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{b}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi a\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

(2) 注意到 $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ 及$\dfrac{\mathrm{d}y}{y'_x}=\mathrm{d}x$ 有

$$\sqrt{1+x'^2_y}=\sqrt{1+y'^2_x}\mathrm{d}x$$

从而有 $$P_y=2\pi\int_a^{a\operatorname{ch}\frac{b}{a}}x\sqrt{1+x'^2_y}\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_0^b x\sqrt{1+y'^2_x}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^b x\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\left(ax\operatorname{sh}\frac{x}{a}-a^2\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)\Big|_0^b$$

$$=2\pi a\left(b\operatorname{sh}\frac{b}{a}-a\operatorname{ch}\frac{b}{a}+a\right).$$

【2494】 $\pm x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$;绕 Ox 轴.

解 $x'_y=\mp\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$ $\quad \mathrm{d}s=\sqrt{1+x'^2_y}\mathrm{d}y=\dfrac{a}{y}\mathrm{d}y$

所以 $P_x = 2 \cdot 2\pi\int_0^a y ds = 4\pi\int_0^a y \cdot \frac{a}{y} dy = 4\pi a^2$.

【2495】 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;
(1) 绕 Ox 轴;(2) 绕 Oy 轴;(3) 绕直线 $y = 2a$.

解 $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = 2a\sin\frac{t}{2} dt$

于是所求表面积为

$$(1)\ P_x = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a\sin\frac{t}{2} dt$$
$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u du = \frac{64}{3}\pi a^2;$$

$$(2)\ P_y = 2\pi\int_0^{2\pi} a(t - \sin t)2a\sin\frac{t}{2} dt$$
$$= 4\pi a\int_0^{2\pi}(t - \sin t)\sin\frac{t}{2} dt = 16\pi^2 a^2;$$

(3) 作平移

$$x = \bar{x}, y = \bar{y} + 2a,$$

则 $\bar{y} = -a(1 + \cos t)$,

则所求表面积为

$$P_{\bar{x}} = 2\pi\int_0^{2\pi} |\bar{y}| ds$$
$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1 + \cos t)2a\sin\frac{t}{2} dt = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

【2496】 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$;绕直线 $y = x$.

解 $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$

$$= \begin{cases} 3a\sin t\cos t dt, & 当\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -3a\sin t\cos t dt, & 当\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

利用对称性,并作旋转,得所求表面积为

$$P = 2 \cdot 2\pi\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{y - x}{\sqrt{2}} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt\right.$$
$$\left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{y - x}{\sqrt{2}} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt\right]$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{2}}\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3t-a\cos^3t)3a\sin t\cos t\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(a\sin^3t-a\cos^3t)3a\sin t\cos t\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{5}\sin^5t+\frac{1}{5}\cos^5t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{5}\sin^5t+\frac{1}{5}\cos^5t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$=\frac{3}{5}\pi a^2(4\sqrt{2}-1).$$

【2497】 $r=a(1+\cos\varphi)$;绕极轴.

解 $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2_\varphi}\mathrm{d}\varphi=2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$

$$y=r\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi=4a\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

因此,所求表面积为

$$P=2\pi\int_0^\pi 8a^2\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

【2498】 $r^2=a^2\cos2\varphi$;(1) 绕极轴;(2) 绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{2}$;(3) 绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

解 (1) $y=r\cdot\sin\varphi=a\sqrt{\cos2\varphi}\cdot\sin\varphi$

$$r'_\varphi=-\frac{a^2\sin^2\varphi}{r},$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2_\varphi}=\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}\varphi,$$

所求表面积为

$$P=2\cdot2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

(2) $x=r\cdot\cos\varphi=a\sqrt{\cos2\varphi}\cdot\cos\varphi$,因此所求表面积为

$$P=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2\sqrt{2}.$$

(3)$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi, y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$

由对称性,并注意到当 $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ 时 $x-y \geqslant 0$,因此,所求表面积为

$$P = 2 \cdot 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x-y}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\,\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\varphi - \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}(\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi a^2.$$

【2499】 由抛物线 $ay = a^2 - x^2$ 与轴 Ox 所围的图形围绕 Ox 轴旋转形成旋转体.求旋转体的曲面积与等体积球表面积的比值.

解 旋转体的表面积为

$$P_x = 2 \cdot 2\pi\int_0^a y\sqrt{1+y_x'}\mathrm{d}x$$

$$= 4\pi\int_0^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right)\sqrt{1+\left(-\frac{2x}{a}\right)^2}\mathrm{d}s$$

$$= 4\pi\int_0^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right)\cdot\frac{2}{a}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\mathrm{d}x$$

$$= 8\pi\int_0^a \sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\mathrm{d}x - \frac{8\pi}{a^2}\int_0^a x^2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\mathrm{d}x$$

$$= 8\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}} + \frac{a^2}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right]\Big|_0^a$$

$$-\frac{8\pi}{a^2}\left[\frac{x\left(2x^2+\frac{a^2}{4}\right)}{8}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right.$$

$$\left.-\frac{a^4}{128}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right]\Big|_0^a$$

$$= \frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right].$$

倒数第二个等号用到了 1820 题的结果旋转体的体积为

$$V_x = \pi\int_{-a}^a \left(a - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{16\pi a^3}{15},$$

设与其等体积的球的半径为 R，则有

$$\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{16\pi a^3}{15},$$

所以 $R=\sqrt[3]{\frac{4}{5}}a$. 于是此球的表面积为

$$P=4\pi R^2=4\pi\sqrt[3]{\frac{16}{25}}a^2,$$

于是 $$\frac{P_x}{P}=\frac{\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]}{4\pi\sqrt{\frac{16}{25}}a^2}$$

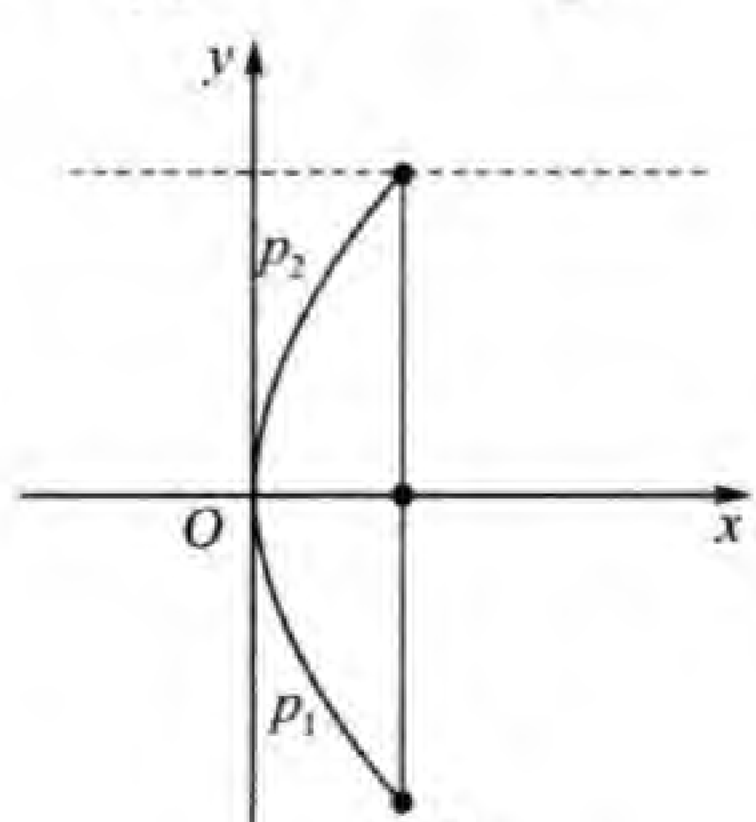
$$=\frac{5\left[14\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]}{128\cdot\sqrt[3]{10}}.$$

【2500】 由抛物线 $y^2=2px$ 与直线 $x=\frac{p}{2}$ 所围成的图形绕直线 $y=p$ 旋转，求旋转体的体积和面积.

解 旋转体的体积为

$$V_{y=p}=\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p+\sqrt{2px})^2\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p-\sqrt{2px})^2\mathrm{d}x$$

$$=4\pi p\cdot\sqrt{2p}\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{3\pi p^3}{3}.$$



2500 题图

下面求旋转体的表面积.

首先,旋转体的侧面积为:注意到在 l_1,l_2 上 dS 相同,

$$
\begin{aligned}
S_{侧} &= \int_{l_1} 2\pi(p+\sqrt{2px})\,dS + \int_{l_2} 2\pi(p-\sqrt{2px})\,dS \\
&= 4\pi p\int_{l_2} dS = 4\pi p\int_0^p \sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy \\
&= 4\pi\int_0^p \sqrt{y^2+p^2}\,dy \\
&= 4\pi\left(\frac{y}{2}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p^2}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right)\Big|_0^p \\
&= 2\pi p^2[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]
\end{aligned}
$$

$$S_{底} = \pi(2p)^2 = 4\pi p^2$$

故所求表面积为

$$P = S_{侧} + S_{底} = 2\pi p^2[2+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})].$$

§9. 矩计算法　重心坐标

1. **矩**　若在 Oxy 平面上,密度为 $\rho=\rho(y)$ 的质量 M 充满了某有界连续统 Ω(线,平面域),而 $\omega=\omega(y)$ 是连续统 Ω 中纵坐标不超过 y 那一部分的相应测度(圆弧长度、面积),则下数

$$
\begin{aligned}
M_k &= \lim_{\max|\Delta y_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i) \\
&= \int_{\Omega}\rho y^k\,d\omega(y_i) \qquad (k=0,1,2\cdots),
\end{aligned}
$$

(其中 $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ 及 $\Delta\omega(y_i)=\omega(y_i)-\omega(y_{i-1})$)

称为质量 M 对于 Ox 轴的 k 次矩.

作为特殊情况,当 $k=0$ 时,得出质量 M,当 $k=1$ 时为静力矩,而当 $k=2$ 时为转动惯量.

同样,可以定义质量对坐标平面的矩.

若 $\rho=1$,则相应的矩被称为几何矩(线矩、面积矩、体积矩等).

2. **重心**　面积为 S 的均匀平面图形的重心坐标(x_0,y_0)按照下式定义:

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S},\qquad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

其中 $M_1^{(y)}$,$M_1^{(x)}$ 为图形对于 Oy 和 Ox 轴的几何静力矩.

【2501】 求半径 a 的半圆弧对于过该弧两个端点的直径的静力矩和转动惯量.

解 取此直径所在的直线为 Ox 轴,圆心作为原点建立直角坐标系,则圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$,从而

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

$$ds=\sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

$\rho=1$ （以后如无说明均取 $\rho=1$),

于是所求的静力矩及转动惯量为

$$M_1=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^2$$

$$M_2=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=a\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Big|_{-a}^{a}=\frac{\pi a^3}{2}.$$

【2501.1】 求抛物线弧对着直线 $x=\frac{p}{2}$ 的静力矩:

$$y^2=2px\quad(0\leqslant x\leqslant\frac{p}{2}).$$

解 $ds=\sqrt{1+x_y'^2}dy=\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy,$

由对称性知所求静力矩及

$$M_1=2\int_0^p\left|\frac{y^2}{2p}-\frac{p}{2}\right|\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy,$$

利用1820题及1876题结果有

$$M_2=\int_0^p\sqrt{p^2+y^2}dy-\frac{1}{p^2}\int_0^p\sqrt{p^2+y^2}dy$$

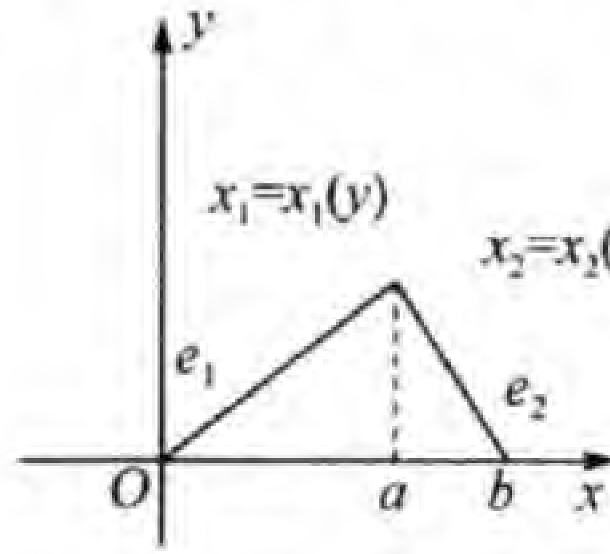
$$= \left[\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p^2}{2}\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})\right]_0^p$$

$$+\frac{1}{p^2}\left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8}\sqrt{p^2+y^2}-\frac{p^4}{8}\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})\right]_0^p$$

$$=\frac{p^2}{8}[\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})].$$

【2502】 求底为 b、高为 h 的均匀三角形薄板对于底边($\rho=1$)的静力矩和转动惯量.

解 取如图 2502 题图所示的坐标系



2502 题图

直线 l_1 的方程为

$$x_1=\frac{c}{h}y,$$

直线 l_2 的方程为

$$x_2=b+\frac{c-b}{h}y,$$

所求静力矩为

$$M_1=\int_0^h y(x_2-x_1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^h y\left(b-\frac{b}{h}y\right)\mathrm{d}y=\frac{bh^2}{6},$$

所求转动惯量为

$$M_2=\int_0^h y^2(x_2-x_1)\mathrm{d}y=\int_0^h y^2\left(b-\frac{b}{t}y\right)\mathrm{d}y=\frac{bh^2}{12}.$$

【2502.1】 求由曲线 $ay=2ax-x^2(a>0)$ 及 $y=0$ 限制的抛物线段对于 Oy 和 Ox 轴的转动惯量.

回转半径 r_x 和 r_y，亦即由比率 $I_x = Sr_x^2, I_y = Sr_y^2$ 确定的值是多少？

式中 S 为线段面积.

解 $ds = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\frac{4}{a^2}(x-1)^2}dx$,

$$y = \frac{1}{a}[1-(x-1)^2],$$

所以 $$I_x = M_2^{(x)} = \int_l y^2 ds$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{a^2}[1-(x-1)^2]^2 \sqrt{1+\frac{4}{a^2}(x-1)^2}dx.$$

【2503】 求半轴为 a 和 b 的均匀椭圆形薄板对于其主轴($\rho = 1$)的转动惯量.

解 不妨设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

则上、下半椭圆的方程为

$$x_1 = -\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, x_2 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},$$

于是所求转动惯量为

$$M_2^{(x)} = \int_{-b}^{b} y^2(x_2-x_1)dy = 2\int_{-b}^{b}\frac{b}{a}y^2\sqrt{b^2-y^2}dy$$

$$= 4\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}dy(\text{令 } y = b\sin t)$$

$$= 4ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{\pi ab^3}{4}.$$

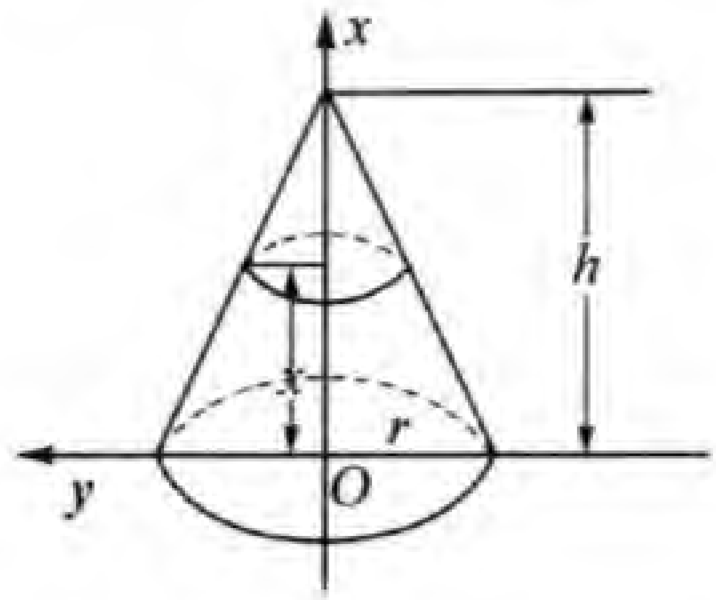
由对称性，半 $M_2(x)$ 中 a、b 的位置对调. 即得

$$M_2^{(y)} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

【2504】 求底半径为 r 高为 h 的均匀圆锥对于该圆锥底平面($\rho = 1$)的静力矩和转动惯量.

解 取如 2504 题图所示的坐标系，则

$$M_1 = \int_0^h x \cdot P(x)dx,$$



2504 题图

其中 $P(x)$ 是过 x 点且垂直于 O_x 轴截圆锥所得截面的面积即

$$P(x)=\pi y^2=\pi\left[\frac{r}{h}(h-x)\right]^2,$$

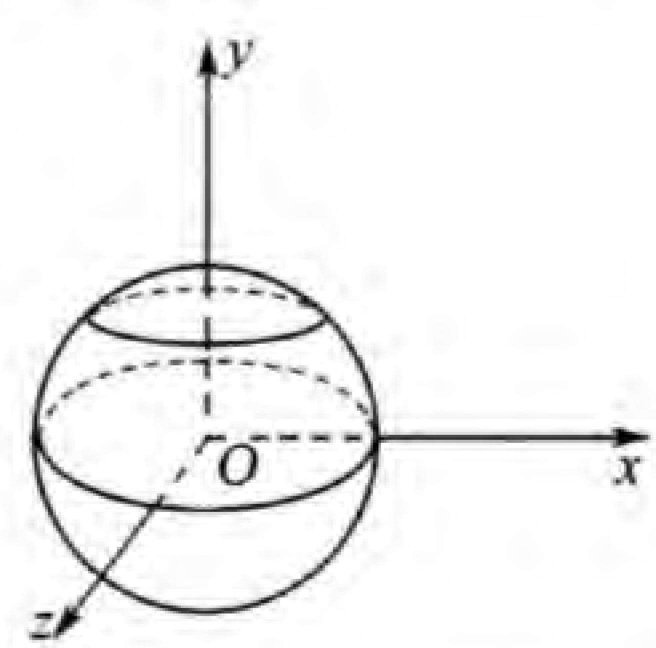
所求静力矩及转动惯量分别为

$$M_1=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x(h-x)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2h^2}{12},$$

$$M_2=\int_0^h x^2P(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2(h-x)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2h^3}{30}.$$

【2504.1】 求半径为 R、质量为 M 的均匀球对于其直径的转动惯量.

解 建立如 2504.1 题所示的坐标系，过 $(0,y)$ 点且垂直于 Oy 轴截球体所得的截面面积为



$$P(y)=\pi(R^2-|y|^2)=\pi(R^2-y^2)$$

因此球体对 xOz 面的转动惯量为

$$M_2^{(xz)}=\int_{-R}^{R}\rho y^2P(y)\mathrm{d}z=2\pi\rho\int_0^R y^2(R^2-y^2)\mathrm{d}y=\frac{4}{15}\pi\rho R^5$$

由对称性可知球体对 xOy 面的转动惯量为

$$M_2^{(xy)} = \frac{4}{15}\pi\rho R^5$$

因此球体对 Ox 轴的转动惯量为

$$M_2^{(x)} = M_2^{xy} + M_2^{xz} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

其中 $\rho = \dfrac{M}{V_{球}} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$,因此

$$M_2^{(x)} = \frac{2}{5}MR^2.$$

注:本题可参见本习题集第六册关于“三重积分在力学上的应用”中相关内容.

【2505】 证明**古尔金第一定理**:平面内弧 C 绕位于同一平面的不与它相交的轴线旋转形成的旋转面面积等于这个弧的长度乘以该弧 C 重心所画出的圆周长度的乘积.

证 由物理可知,重心(ξ,η)具有这样的性质,如将曲线的全部“质量”都集中到重心,则此质量对于任何一轴的静力矩,都与曲线对此轴的静力矩相同,即

$$\xi s = M_y = \int_0^s x\mathrm{d}s,$$

$$\eta = M_x = \int_0^s y\mathrm{d}s,$$

其中 s 表示弧长. 于是

$$2\pi\eta \cdot s = 2\pi\int_0^s y\mathrm{d}s,$$

上式后端是弧 C 绕 Ox 轴旋而成的旋转曲面的面积. 左边 $2\pi\eta$ 是 C 绕 Ox 轴旋转时其重心所划出的圆周的长度. 从而定理得证.

【2506】 证明**古尔金第二定理**:平面图形 S 绕位于图形平面的不与它相交的轴线旋转形成的体积等于平面图形面积 S 与该图形重心所画出的圆周长度的乘积.

证 由重心(ξ,η)的物理意义有

$$\eta \cdot S = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\mathrm{d}x,$$

所以 $\qquad 2\pi\eta \cdot S = \pi\int_a^b y^2 \mathrm{d}s,$

上式右端即为旋转体的体积. 从而定理得证.

【2507】 确定下列圆弧重心的坐标:

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi \qquad (|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi).$$

证 设重心为(ξ,η) 显然 $\eta = 0$ 又圆弧长为

$$s = 2a\alpha, \quad \mathrm{d}s = \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi}\mathrm{d}\varphi = a\mathrm{d}\varphi,$$

又 $\qquad M_y = \int_0^s x\mathrm{d}s = \int_{-\alpha}^{\alpha} a^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = 2a^2\sin\alpha,$

所以 $\qquad \xi = \dfrac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha} = \dfrac{a\sin\alpha}{\alpha}$,即重心为$\left(\dfrac{a\sin\alpha}{\alpha},0\right)$.

【2508】 确定由下列抛物线所围的区域重心的坐标:

$$ax = y^2, \qquad ay = x^2 \qquad (a > 0).$$

解 利用古尔金第二定理求解由 2397 题知,面积为

$$S = \frac{a^2}{3},$$

绕 Ox 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V = \pi\int_0^a \left(ax - \frac{x^4}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{3\pi a^3}{10},$$

于是有 $\quad 2\pi\eta \cdot \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{3\pi a^3}{10},$

所以 $\qquad \eta = \dfrac{9a}{20},$

利用对称性知

$$\xi = \frac{9a}{20},$$

即所求重心为$\left(\dfrac{9a}{20},\dfrac{9a}{20}\right)$.

【2509】 确定区域重心的坐标:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b).$$

解 第一象限椭圆的面积为

$$S = \frac{1}{4}\pi ab,$$

而此面积旋 Ox 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^a y^2\,\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^x)\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}ab^2.$$

根据古尔金第二定理有

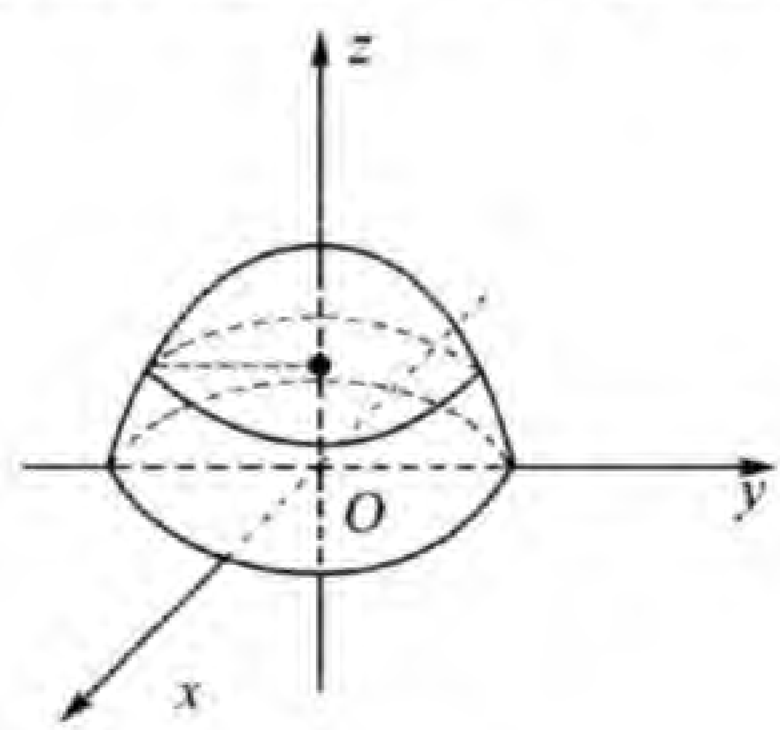
$$2\pi\eta\cdot\frac{\pi ab}{4}=\frac{2\pi}{3}ab^2,$$

所以 $\eta=\dfrac{4b}{3\pi}$,

同样可得 $\xi=\dfrac{4a}{3\pi}$. 即所求重心为 $\left(\dfrac{4a}{3\pi},\dfrac{4b}{3\pi}\right)$.

【2510】 确定半径为 a 的均质半球的重心.

解 取球心为原点,建立如 2510 题图所示的坐标系



2510 题图

即半球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad z\geqslant 0$$

设重心为$(\xi、\eta、\delta)$ 显然 $\xi=\eta=0$.

设 $V_{半球}=\dfrac{2\pi a^3}{3}$,将半圆$y^2+z^2=a^2 \qquad (z\geqslant 0)$,绕 Oz 轴旋转即得半球,而过点$(0,0,z)$ 且垂直于 O_z 轴的平面截球体所得截面为圆,其面积

$$P(z)=\pi y^2=\pi(a^2-z^2),$$

所以 $M_1^{(z)}=\displaystyle\int_0^a zP(z)\,\mathrm{d}z=\pi\int_z^a y(a^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi a^4}{4},$

故 $$\delta=\frac{M_1^{(z)}}{V}=\frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}}=\frac{3a}{8},$$

于是,所求重心为$\left(0,0,\frac{3a}{8}\right)$.

【2511】 确定对数螺线 $r=ae^{m\varphi}(m>0)$ 从 $O(-\infty,0)$ 点到 $P(\varphi,r)$ 点的弧 OP 的重心 $C(\varphi_0,r_0)$ 坐标. 当 P 点移动时 C 点画出什么样的曲线?

解 重心的直角坐标为

$$x_0=\frac{\int_l x\mathrm{d}s}{\int_l x\mathrm{d}s}=\frac{\int_{-\infty}^{\varphi} r\cos\varphi\sqrt{a^2(1+m^2)}e^{m\varphi}\mathrm{d}\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}\sqrt{a^2(1+m^2)}e^{m\varphi}\mathrm{d}\varphi}$$

$$=\frac{a\int_{-\infty}^{\varphi}e^{2m\varphi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}e^{m\varphi}\mathrm{d}\varphi}$$

$$=\frac{ma\,e^{m\varphi}(\sin\varphi+2m\cos\varphi)}{4m^2+1},$$

同样可得

$$y_0=\frac{\int_l y\mathrm{d}s}{\int_l \mathrm{d}s}=\frac{ma\,e^{m\varphi}(2m\sin\varphi-\cos\varphi)}{4m^2+1},$$

于是重心的极坐标为

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{ma}{4m^2+1}e^{m\varphi}\sqrt{4m^2+1}$$

$$=\frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}},$$

$$\tan\varphi_0=\frac{y_0}{x_0}=\frac{2m\tan\varphi-1}{\tan\varphi+2m}=\frac{\tan\varphi-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{2m}\tan\varphi},$$

即 $\varphi_0=\varphi-\alpha$,其中 $\alpha=\arctan\frac{1}{2m}$.

当 P 点移动时，$C(\varphi_0,r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0=\frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m\varphi}$$
$$=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m(\varphi_0+\alpha)},$$

这也是一条对数螺线.

【2512】 确定由曲线 $r=a(1+\cos\varphi)$ 所围的区域重心的坐标.

解 其面积微元 $dS=ydx$，设其重心为(x_0,y_0)，由对称性知 $y_0=0$，而

$$x_0=\frac{\int_S x\,dS}{\int_S dS}=\frac{\int_l xy\,dx}{\int_l y\,dx}$$
$$=\frac{2\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi[-\sin\varphi(1+2\cos\varphi)]d\varphi}{2\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)\sin\varphi[-\sin\varphi(1+2\cos\varphi)]d\varphi}$$
$$=\frac{5a}{6},$$

于是所求重心为$\left(\frac{5a}{6},0\right)$极坐标为 $\varphi_0=0$，$r_0=\frac{5a}{6}$.

【2513】 确定由摆线

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t),\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

的第一拱与 Ox 轴所围区域的重心的坐标.

解 由对称性知 $x_0=\pi a$. 由 2413 题的结果知面积

$$S=3\pi a^2$$

再由 2480 题知 S 绕 Ox 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V_x=5\pi^2a^3$$

根据古尔金第二定理(2506 题) 有

$$2\pi y_0S=V_x$$

所以 $y_0=\frac{5\pi^2a^3}{2\pi\cdot 3\pi a^2}=\frac{5a}{6}$，因此，所求重心为$\left(\pi a,\frac{5a}{6}\right)$.

【2514】 确定面积

$$0 \leqslant x \leqslant a; \qquad y^2 \leqslant 2px$$

绕 Ox 轴旋转形成的旋转体的重心的坐标.

解 设重心坐标为 (x_0, y_0),

由对称性知 $y_0 = 0$,

$$x_0 = \frac{\int_{(v)} x\mathrm{d}v}{\int_{(v)} \mathrm{d}v} = \frac{\int_0^a x\pi y^2 \mathrm{d}x}{\int_0^a \pi y^2 \mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a 2px^2 \mathrm{d}x}{\int_0^a 2px \mathrm{d}x} = \frac{2a}{3},$$

因此,所求重心为 $\left(\frac{2}{3}a, 0\right)$.

【2515】 确定半球重心的坐标:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (z \geqslant 0).$$

解 设重心为 (x_0, y_0, z_0),由对称性知

$$x_0 = y_0 = 0,$$

将半球看成由四分之一圆 $(x^2 + z^2 = a^2, z \geqslant 0, x \geqslant 0)$ 绕 Oz 轴旋转而成的旋转体,所以

$$z_0 = \frac{\int_0^a z 2\pi x \sqrt{1 + x'^2_z} \mathrm{d}z}{\int_0^a 2\pi x \sqrt{1 + x'^2_z} \mathrm{d}z}$$

$$= \frac{\int_0^a z \cdot 2\pi \cdot \sqrt{a^2 - z^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} \mathrm{d}z}{\int_0^a 2\pi \sqrt{a^2 - z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} \mathrm{d}z}$$

$$= \frac{2\pi a \int_0^a z \mathrm{d}z}{2\pi a \int_0^a \mathrm{d}z} = \frac{a}{2}.$$

因此,所求重心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

§ 10. 力学和物理学的问题

写出适当的积分和并找出它们的极限，解下列问题：

【2516】 杆件长 $l = 10\text{m}$，若杆件的线性密度按照规律 $\delta = 6 + 0.3x\text{kg/m}$ 变化（这里 x 为离杆件一端的距离），求出杆件的质量.

解 将该轴 n 等分，每份长 $\Delta x = \dfrac{10}{n}$ 将每小段近似地看成均质的，并以右端点的密度作为小段的密度，这样就得到该轴质量 M 的近似值，即

$$M \approx \sum_{i=1}^{n}(6 + 0.3 \times \frac{10i}{n})\frac{10}{n},$$

当 n 愈大，近似值愈接近 M，对积分和取极限，则得该轴的质量 M，即

$$\begin{aligned}M &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(6 + 0.3 \times \frac{10i}{n}\right)\frac{10}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[60 + \frac{30}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[60 + \frac{15(n+1)}{n}\right] \\ &= 75(\text{千克}).\end{aligned}$$

【2517】 把质量为 m 的物体从地球表面（其半径为 R）升高到 h 高度，需要耗费多少功？若将物体抛至无穷远，则这个功等于什么？

解 由牛顿万有引力定律

$$f = k\frac{mM}{r^2},$$

其中 M 为地球的质量，r 为物体离开地球中心的距离，k 为比例常数，将 h 分成 n 等份，在每份上把万有引力近似地看成不变，在第 i 份上，取

$$r_i = \sqrt{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R\right]\left[\frac{h}{n}i + R\right]},$$

则引力为

$$f_i = k\frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{h}{n}i+R\right]},$$

则得功 W 的近似值为

$$W \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{kmM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{h}{n}i+R\right]}\cdot\frac{h}{n},$$

于是所得功为

$$\begin{aligned}W &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{kmM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{h}{n}i+R\right]}\cdot\frac{h}{n}\\&= \lim_{n\to+\infty}kmMn\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h(i-1)+nR}-\frac{1}{hi+nR}\right]\\&= \lim_{n\to+\infty}kmMn\left(\frac{1}{nR}-\frac{1}{n(R+h)}\right)\\&= \frac{kmMh}{R(R+h)} = gm\frac{R\cdot h}{R+h},\end{aligned}$$

其中 g 为重力加速度,$k=\frac{gR^2}{M}$ 为引力常数.

若物移到无穷远处,则功

$$W_\infty = \lim_{h\to+\infty}W = \lim_{h\to+\infty}gm\frac{R\cdot h}{R+h} = gmR.$$

【2518】 若1公斤力能拉伸弹簧1厘米,要将弹簧拉伸10厘米,需要耗费多少功?

提示:利用胡克定律.

解 由胡克定律知弹簧恢复力 F 与伸长量 x 成正比,即

$$F = kx.$$

由题中条件知 $k=1$,现将10厘米 n 等分,在每份是恢复力的大小近似地看作不变,并取右端点的力为该小段的力,得功 W 的近似值为

$$W \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\cdot\frac{10}{n},$$

令 $n\to\infty$，取极限则得所要求的功

$$W=\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{10}{n}i\cdot\frac{10}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{100}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=50(\text{千克厘米}).$$

【2519】 直径为 20 厘米，长为 80 厘米的圆筒充满压强为 10 公斤力/厘米^2 的蒸汽. 假设蒸汽温度不变，要使蒸汽体积减少$\frac{1}{2}$，需要耗费多少功?

解 由玻义耳—马略特定律有 $PV=C$，其中 P 是气体的压强，V 表示气体的体积，C 为常量.

由已知条件可得常量为

$$C=P_0V_0=10\times\left(\pi\times\left(\frac{20}{2}\right)^2\times 80\right)$$
$$=80000\pi(\text{千克厘米})=800\pi(\text{千克米}).$$

设初始时气体体积为 V_0，特区间$\left[\frac{V_0}{2},V_0\right]$分成几个小区间，分点依次为

$$\frac{V_0}{2},\frac{V_0}{2}q,\frac{V_0}{2}q^2,\cdots,\frac{V_0}{2}q^i,\cdots,\frac{V_0}{2}q^n=V_0,$$

其中 $q=\sqrt[n]{\dfrac{V_0}{\frac{V_0}{2}}}=\sqrt[n]{2}$. 由于气体体积从$\frac{V_0}{2}q^{i+1}$ 减小至$\frac{V_0}{2}q^i$ 须要代费功近似值为

$$\Delta W=P\Delta V=\left[C\left(\frac{V_0}{2}q^i\right)^{-1}\right]\left(\frac{V_0}{2}q^{i+1}-\frac{V_0}{2}q^i\right),$$

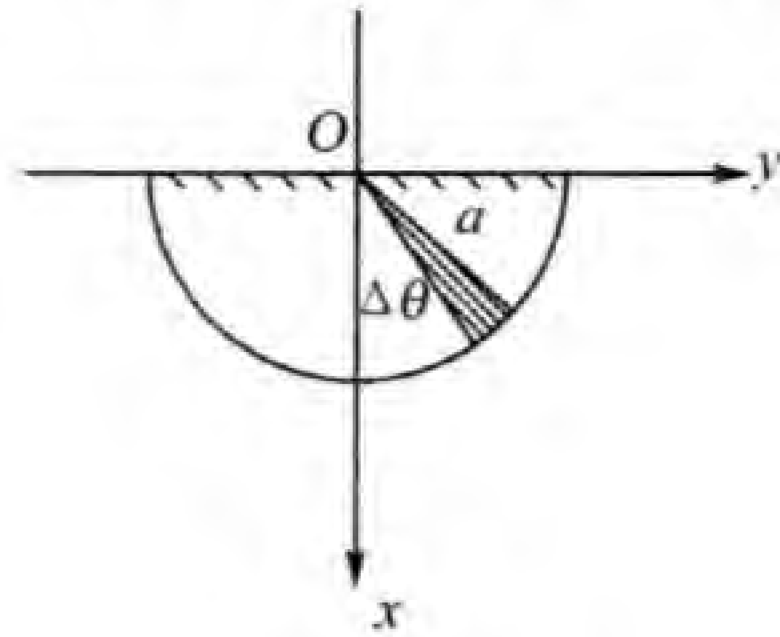
于是所要求的功为

$$W=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[C\left(\frac{V_0}{2}q^i\right)^{-1}\right]\left(\frac{V_0}{2}q^{i+1}-\frac{V_0}{2}q^i\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}cn(\sqrt[n]{2}-1)=C\ln 2\,*$$
$$=800\pi\cdot\ln 2\approx 1740(\text{千克米}).$$

(*) 利用 541 题的结果.

【2520】 确定具有半径为 a 其直径位于水面上的半圆形垂直壁上的水压力.

解　半圆形垂直壁形状如图所示，由于对称性，只要计算出作用于四分之一圆上的压力，然后乘以两倍即可.



2520 题图

将四分之一圆等分成几个圆心角为$\Delta\theta$的小扇形，作用于该小扇形上的压力的近似值为

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta\cdot\frac{2}{3}a\cdot\sin\theta_i,$$

其中　$\Delta\theta=\frac{\pi}{2n},\theta_i=i\frac{\pi}{2n}$. 于是作用在半圆上的压力

$$P=2\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{2}{3}a\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$=\frac{2}{3}a^3\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{2}{3}a^3 *.$$

* 利用 2187 题的结果.

【2521】　若下底沉没于水下 $c=20\text{m}$，求具有下底 $a=10\text{m}$，上底 $b=6\text{m}$，高 $h=5\text{m}$ 的梯形垂直壁上的水压力.

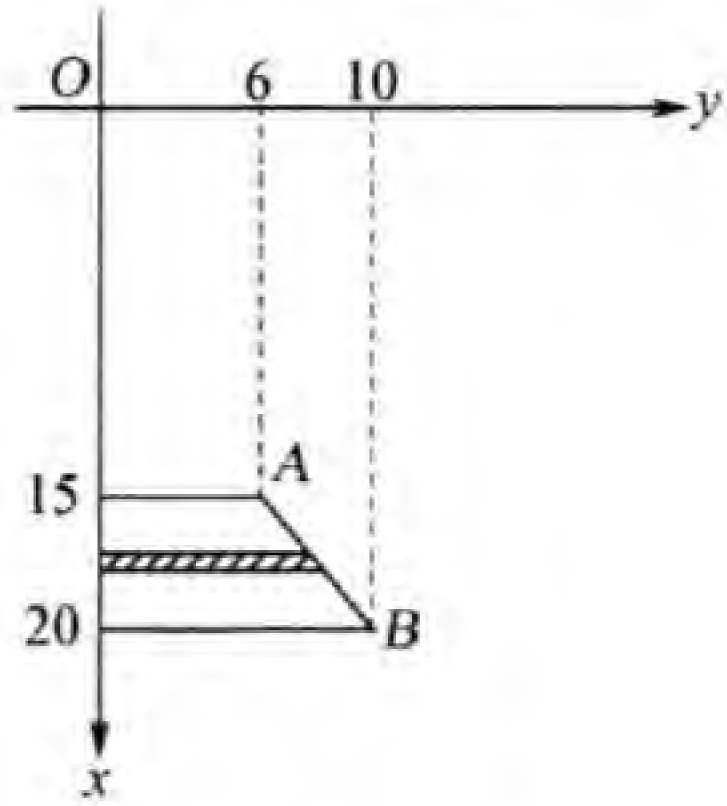
解　建立坐标系如图所示. 其中 AB 所满足的方程为

$$y=\frac{4}{5}x-6,$$

将区间$[15,20]$$n$等分，每份长 $\Delta x=\frac{5}{n}$，对应于 Δx 的小条上所受的压力的近似值为

$$\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n},$$

于是，所要求的压力为



2521 题图

$$P = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}$$

$$= 708\,\frac{1}{3}\text{（吨）}^{*}.$$

* 与 2185 题和 2518 题的作法类似.

作出微分方程式，解决下列问题（2522 ～ 2530）.

【2522】 点的速度按照 $v = v_0 + at$ 规律变化，问在$[0, T]$时段内该点跑出多少路程？

解 设路程为 S，由速度的定义有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v = v_0 + at,$$

即在 $\mathrm{d}t$ 时间内经历的路程为

$$\mathrm{d}s = (v_0 + at)\mathrm{d}t,$$

于是所要求的路程

$$S = \int_0^T (v_0 + at)\mathrm{d}t = v_0 T + \frac{1}{2}aT^2.$$

【2523】 半径为 R、密度为 δ 的均质球绕其直径以角速度 ω 旋转，求此球的动能.

解 已知半径为 R，质量为 M 的圆盘绕垂直盘心的轴心转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$. 将本题中的均质球体看作是一系列厚度为 $\mathrm{d}z$ 垂直于 z 轴的圆盘组成均质球体的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

因此圆盘的转动惯量为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}J_z&=\frac{1}{2}[\delta\pi(R^2-Z^2)\mathrm{d}z]\cdot(R^2-Z^2)\\&=\frac{1}{2}\delta\pi(R^2-Z^2)^2\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

整个球体的转动惯量为

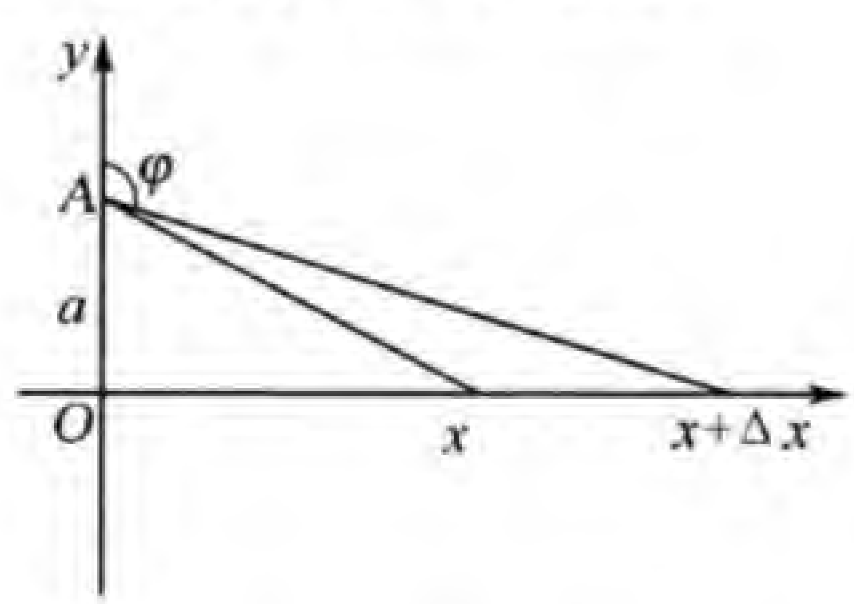
$$J_z=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2\mathrm{d}z=\frac{8}{15}\pi\delta R^5,$$

于是球的转动动能为

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{4}{15}\pi\delta R^5\omega^2.$$

【2524】 具有不变的线性密度 μ_0 的无限长自然直线以多大的力吸引离此直线的距离为 a、质量为 m 的质点?

解 建立坐标如图所示,其中 $|AO|=a$,由万有引力公式可知引力在坐标轴上一投影为 F_x,F_y,由于



2524 题图

$$\mathrm{d}F_y=k\frac{m\mu_o\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)}\cos\varphi=-\frac{km\mu_o a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

其中 K 为引力常数.

于是

$$\begin{aligned}F_y&=-2km\mu_o a\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=-2km\mu_o a\left.\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right|_0^{+\infty}=-\frac{2km\mu_o}{a},\end{aligned}$$

由对称性可知，

$$F_x = 0,$$

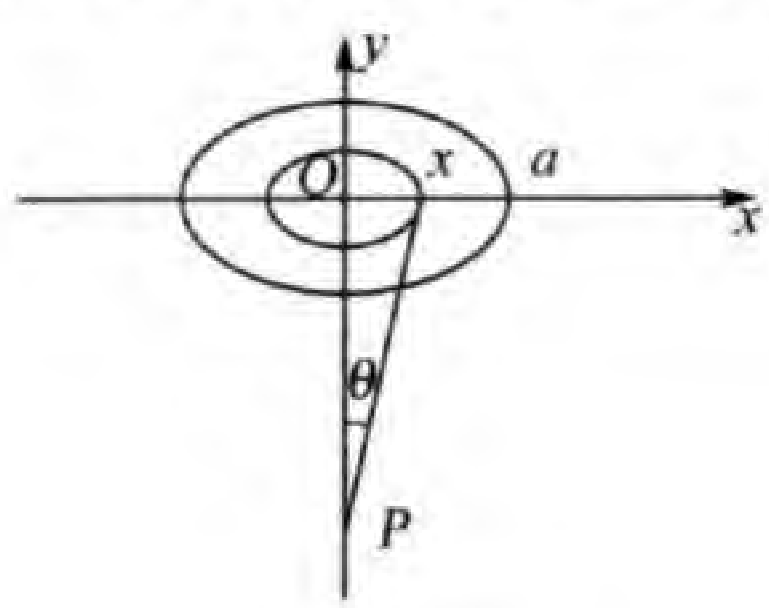
若计算，可得同样结果

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{km\mu_0 sin\varphi}{(a^2 + x^2)} \mathrm{d}x = km\mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = 0,$$

由上述分析可知，引力指向 y 轴的负向.

【2525】 计算半径为 a、恒定表面密度为 δ_0 的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P，该质点位于通过薄板中心 Q，并与其平面垂直的垂线上，最短距离 PQ 等于 b.

解 建立坐标如图所示，对于以 x 为半径的圆环，其质量为 $\mathrm{d}m = \delta_0 2\pi x \mathrm{d}x$，对质点 P 的引力在 y 轴上的投影为



2525 题图

$$\mathrm{d}F_y = \frac{km\delta_0 \mathrm{d}m}{(b^2 + x^2)} cos\theta = 2km\delta_0 \pi \frac{bx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x,$$

其中 k 为引力常数.

于是

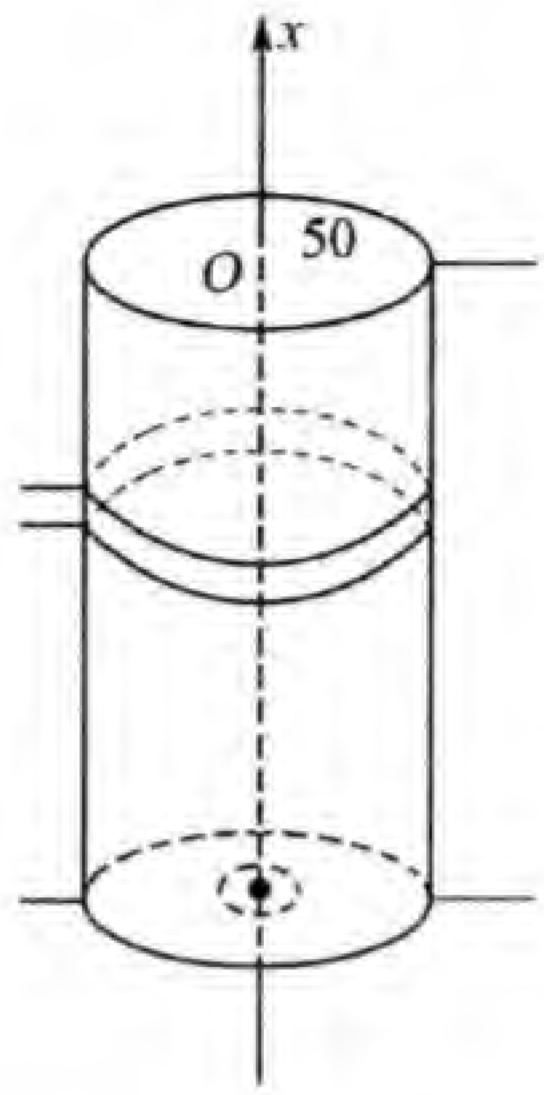
$$F_y = 2km\delta_0 \pi \int_0^a \frac{bx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x} = 2km\delta_0 \pi \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right),$$

由对称性可知，$F_x = 0$，所以引力指向 y 轴正向.

【2526】 根据托里拆利定律，液体从器皿中流出的速度等于 $v = c\sqrt{2gh}$（其中 g 为重力加速度，h 为液体表面距离孔口的高度，$c = 0.6$ 为经验系数.）

直径 $D = 1\text{m}$ 且高度 $H = 2\text{m}$ 的立式圆筒，液体充满后从其底上通过直径为 $d = 1\text{cm}$ 的圆孔流出，需要多长时间能流空?

解　建立坐标如图所示. 在 $\mathrm{d}t$ 时间内,从圆孔内流出的液体体积为



2526 题图

$$\mathrm{d}v = v\mathrm{d}t \cdot s = 0.15\pi\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t,$$

而桶内液体体积的减少量为

$$\mathrm{d}v = -\pi(50)^2\mathrm{d}x,$$

其中 x 随时间 t 的增大而减小. 由于流出的量与桶内减少的量相等,于是有

$$0.15\pi\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t = -\pi(50)^2\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{200}^x \frac{2500}{0.15}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2gx}},$$

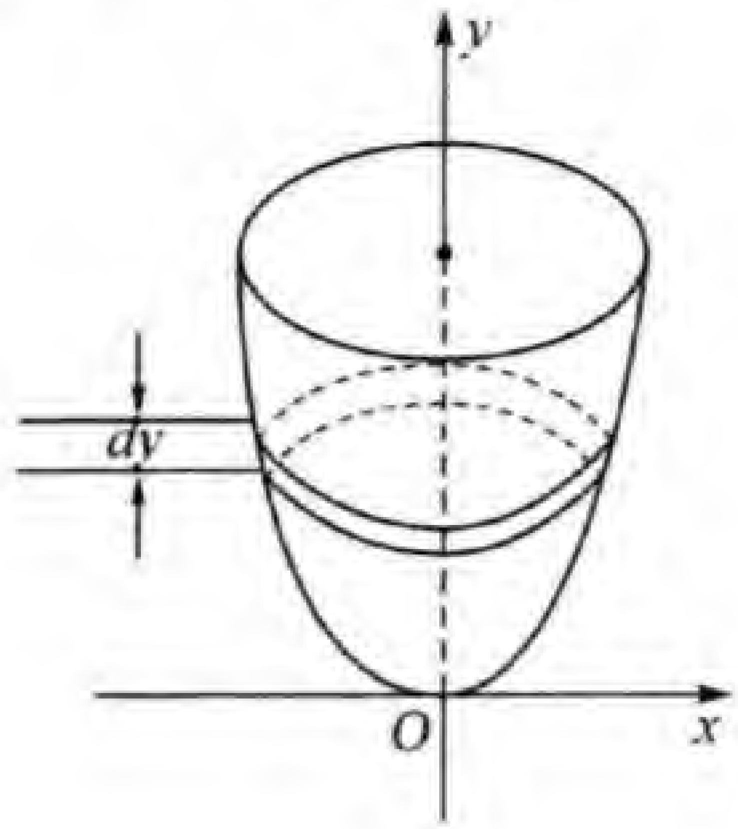
即　　$t = -33333\dfrac{1}{\sqrt{2g}}(\sqrt{x} - \sqrt{200})$,其中 $g = 980$ 厘米 / 秒^2.

当 $x = 0$ 时,t 表示水流完所需的时间,因此有

$$t \approx \frac{33333\sqrt{200}}{\sqrt{2 \times 980}} = 10648(\text{秒}) \approx 3 \text{ 小时}.$$

【2527】　作为旋转体的容器应该是什么形状,才能使液体出流时,液体表面是均匀下降的?

解　建立坐标如图所示，设流出孔的半径为单位厘米. 与上题类似，流出的量与容器内液体体积的减少量相等，有



2527 题图

$$\pi x^2 \mathrm{d}y = -\pi v \mathrm{d}t = -\pi C\sqrt{2gy}\,\mathrm{d}t,$$

即　　$\mathrm{d}y = -c\sqrt{2g}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{x^2}\mathrm{d}t$，其中 c 为实验系数，g 为重力加速度. 由题意知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -c\sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{y}}{x^2},$$

应等于常数 k，即

$$-c\sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{y}}{x^2} = k$$

于是　　$y = Cx^4$. 其中 C 为常数，所以容器应当是把曲线 $y = Cx^4$ 绕铅直轴 oy 旋转而得的曲面所构成的.

【2528】　镭在每个时段的分解速度与其现存量成正比. 若在开始时刻 $t = 0$ 时有镭 Q_0 克，而经过 $T = 1600$ 年后，镭的数量减少一半，求镭的分解规律.

解　设 Q 为镭现存的量，由题意有

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = kQ,$$

其中 k 为比例系数，分离变量，有

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = k\mathrm{d}t,$$

两边积分

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}}\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=\int_0^{1600}k\mathrm{d}t,$$

可得 $k=-\dfrac{\ln 2}{1600}$,

于是 $\displaystyle\int_{Q_0}^{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\frac{\ln^2}{1600}\int_0^t\mathrm{d}t,$

解之 $\ln\dfrac{Q}{Q_0}=-\dfrac{t}{1600}\ln 2=\ln 2^{-\frac{t}{1600}},$

所以,镭的分解规律为

$$Q=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{1600}}.$$

【2529】 对于二阶化学反应过程的情况,物质 A 变成物质 B 的化学反应速度与这两种物质的浓度乘积成正比.若当 $t=0$ 分钟时,器皿中有 20% 物质 B,而当 $t=15$ 分钟变成 80%,求经过 $t=1$ 小时后器皿中物质 B 的百分比是多少?

解 设 X 为生成物 B 的浓度,由题意有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(1-x),$$

其中 k 为比例系数.分离变量有

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}=k\mathrm{d}t,$$

两边积分

$$\int_{0.2}^{0.8}\frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}=\int_0^{15}k\mathrm{d}t,$$

所以 $k=\dfrac{1}{15}\ln 16$. 于是

$$\int_{0.2}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}=\int_0^t k\mathrm{d}t=\frac{t}{15}\ln 16.$$

即 $t=\dfrac{15}{\ln 16}\ln\dfrac{4x}{1-x}$. 将 $t=60$ 秒代入上式,得

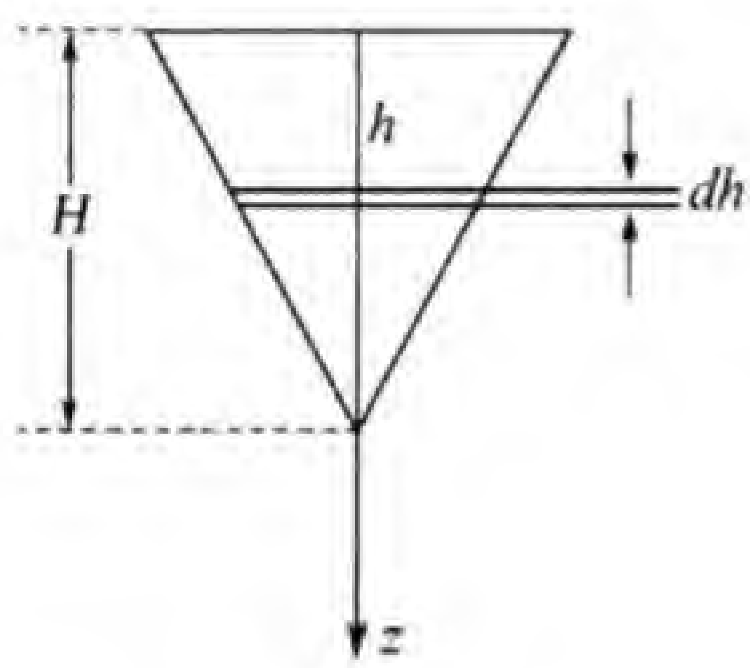
$$x=\frac{16^4}{16^4+4}=99.99\%,$$

所以经过 $t=1$ 小时,在容器中所含有物质 B 的百分比为99.99%.

【2530】 根据胡克定律，杆件的相对伸长率 ε 与在相应横断面上的应力 σ 成正比，亦即 $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$，这里 E 为杨氏模量.

若一锥形重杆件的底半径为 R、圆锥高为 H 和比重为 γ，锥底固定，锥尖向下，求该杆件的伸长.

解 建立坐标如图所示，在 $z = h$ 截面处对于高度为 $\mathrm{d}h$ 的锥体伸长量为 $\mathrm{d}l$，则有 $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}h}$. 该处的压力为



2530 题图

$$\delta = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)\gamma}{\pi r^2 E} = \frac{1}{3}\frac{(H-h)}{E}\gamma,$$

由胡克定律，有

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{3}\frac{(H-h)}{E}\gamma,$$

即
$$\mathrm{d}l = \frac{(H-h)}{3E}\gamma \mathrm{d}h.$$

于是，圆锥形重棒总的伸长量为

$$l = \int_0^H \frac{(H-h)\gamma}{3E}\mathrm{d}h = \frac{\gamma H^2}{6E}.$$

§11. 定积分的近似计算方法

1. **矩形公式** 若函数 $y = y(x)$ 在有穷区间 $[a,b]$ 是连续的且可微分足够次数，且 $h = \frac{b-a}{n}$，$x_i = a + ih\,(i = 0,1,\cdots,n)$，$y_i$

$= y(x_i)$,则$\int_a^b y(x)\mathrm{d}x = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) + R_n$,

其中$R_n = \dfrac{(b-a)h}{2}y'(\xi)(a \leqslant \xi \leqslant b)$.

2. **梯形公式** 用同样的记号有:

$$\int_b^a y(x)\mathrm{d}x = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

其中 $R_n = -\dfrac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi')(a \leqslant \xi' \leqslant b)$.

3. **抛物线公式(辛普森公式)** 假定$n = 2k$,得

$$\int_a^b y(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k-2})] + R_n,$$

其中 $R_n = -\dfrac{(b-a)\,h^4}{180}f^{(4)}(\xi'')(a \leqslant \xi'' \leqslant b)$.

以下 2531 题至 2545 题是利用矩形公式,梯形公式及抛物线公式,求定积分的近值.我们这里略去详细解答,有兴趣的读者可利用计算机进行近似计算.

【2531】 运用矩形公式($n = 12$),近似计算$\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$.并把结果与精确答案比较.

解 按矩形公式,得

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{6}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}) \approx -6.1390,$$

实际上

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x = -x\cos\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x \approx -6.2832.$$

利用梯形公式计算下列积分并评估它们的误差(2532 ~ 2534).

【2532】 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}(n = 8)$.

解 按梯形公式得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \approx h\left(\frac{y_0+y_8}{2}+\sum_{i=1}^{7} y_i\right)$$
$$= 0.125(0.75+4.8029) \approx 0.69412,$$

误差为

$$|R_n| = \left|\frac{1}{12\times 8^2}\cdot\frac{2}{(1+\xi)^3}\right| \qquad (0\leqslant\xi\leqslant 1).$$

于是,

$$|R_n| \leqslant \frac{2}{12\times 8^2} < 0.0027 = 2.7\times 10^{-3}$$

实际上

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0.69315.$$

【2533】 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}(n=12)$.

解 由梯形公式得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \approx h\left(\frac{y_0+y_{12}}{2}+\sum_{i=1}^{11} y_i\right)$$
$$= 0.08333(0.75+9.27258) \approx 0.83518,$$

误差为

$$|R_n| = \left|\frac{1}{12\times 12^2}\cdot\frac{12\xi^4-6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right| \qquad (0\leqslant\xi\leqslant 1),$$

利用求极值的方法,估计得 $\left|\frac{12\xi^4-6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right|$ 在[0,1] 上不超过 2,于是,

$$|R_n| \leqslant \frac{2}{12\times 12^2} < 0.00116 = 1.16\times 10^{-3},$$

实际上,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^{①}\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.83565.$$

---

① 利用 1881 题的结果.

【2534】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\mathrm{d}x \quad (n=6)$.

解 按梯形公式,得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\mathrm{d}x &\approx h\left(\frac{y_0+y_6}{2}+\sum_{i=1}^{5} y_i\right)\\ &= 0.2618(0.9330+4.6722)\\ &\approx 1.4674,\end{aligned}$$

误差为

$$|R_n| = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12\times 6^2} |y''(\xi)|,$$

其中 $y=\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}$, $0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 利用$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant 1$及 $y^2=1-\frac{1}{4}\sin^2 x$ 依次求导得 $|y''|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是,

$$|R_n| \leqslant \frac{\pi^3}{8\times 12\times 6^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} < 2.59\times 10^{-3}.$$

利用辛普森公式计算积分(2135 ~ 2539).

【2535】 $\int_1^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x \quad (n=4)$.

解 按辛普森公式,得

$$\begin{aligned}\int_1^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3}[(y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2]\\ &= \frac{2}{3}[4+4(1.732+2.646)+2(2.236)]\\ &\approx 17.323.\end{aligned}$$

实际上,

$$\int_1^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{52}{3} \approx 17.333.$$

【2536】 $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\mathrm{d}x \quad (n=6)$.

解 按辛普森公式,得

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{\pi}{18}[(2+1.414)+4(1.966+1.732+1.461)$$
$$+2(1.871+1.581)]$$
$$\approx 5.4025.$$

【2537】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \quad (n=10)$.

解 按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$
$$\approx \frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)$$
$$+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$
$$=\frac{\pi}{60}[(1+0.63662)+4(0.99589+0.96340$$
$$+0.90032+0.81033+0.69865)$$
$$+2(0.98363+0.93549+0.85839+0.75683)]$$
$$\approx 1.37076.$$

【2538】 $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\ln(1+x)} \quad (n=6)$.

解 按辛普森公式，得

$$\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$$
$$\approx \frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$
$$=\frac{1}{18}[(1+1.4427)+4(1.0812+1.2332+1.3748)$$
$$+2(1.1587+1.3051)]$$
$$\approx 1.2293.$$

【2539】 运用 $n=10$，计算卡塔兰常数：

$$G=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x.$$

解 按辛普森公式，得

$$G\approx \frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)$$

$$+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{1}{30}(1.78540+18.32888+7.36476)$$

$$\approx 0.91597.$$

【2540】 利用公式$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$,计算数 π,精度到 10^{-5}.

解 $$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\approx\frac{1}{36}[(y_0+y_{12})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9+y_{11})$$

$$+2(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})]=0.785398$$

所以

$$\pi\approx 0.785398\times 4=3.14159,\text{精确到 }0.00001.$$

【2541】 计算$\int_0^1 e^{x^2}dx$,精度到 0.001.

解 $$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

$$\approx\frac{1}{18}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

$$\approx 1.463.$$

【2542】 计算$\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$,精度到 10^{-4}.

解 本题不能直接利用辛普森公式计算,因为被积函数 $(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$ 的四阶导函数在 $x=0$ 的右近旁无界,故不能估数出误差.用台劳公式计算,其计算及估计误差都很简单.可以通过改变被积函数或把其积分区间分为两个间接利用辛普森公式来求定积分的近似值.由于本题解答较为繁琐,故略去,有兴趣的同学可以尝试作答.

【2543】 计算概率积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$,精度到 0.001.

解 按辛普森公式,得

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\frac{1}{(1-t)^2}dt\approx 0.88627.$$

【2544】 近似地求出其半轴为 $a = 10$ 和 $b = 6$ 的椭圆的周长.

解 按辛普森公式,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt$$

$$\approx \frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

$$=\frac{\pi}{36}(1+0.6+3.913+3.293+2.539+1.833+1.422)$$

$$\approx 1.276$$

所以,椭圆周长近似值为

$$S = 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt \approx 40\times 1.276 = 51.04.$$

【2545】 取 $\Delta x = \frac{\pi}{3}$,按点绘制函数图形:

$$y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

解 令 $n = 2k = 6$ 按辛普森公式求出 $y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$.

当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,由于 $h=\frac{\pi}{18}$,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \approx \frac{\pi}{54}(1+0.827+3.980+3.820+3.511+1.960+1.841) \approx 0.99,$$

当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时,由于 $h=\frac{\pi}{9}$,得

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} dt \approx \frac{\pi}{27}(1+0.413+3.919+3.308+2.257+1.841+1.411) \approx 1.65.$$

选取不同的 h,类似可得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt \approx 1.85; \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \approx 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \approx 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \approx 1.42.$$

如下图表所示：

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42